Spécial énigmes

ENTRETIEN

Mathématicien de formation,
Stanislas Dehaene
est chercheur en neuropsychologie cognitive au service hospitalier Frédéric-Joliot à Orsay (CEA-INSERM). Il a publié *La Bosse des maths* chez Odile Jacob en 1997.
dehaene@shfj.cea.fr

Stanislas Dehaene : Qu'est-ce qu'un nombre ?

Pour de nombreux mathématiciens, les nombres sont des réalités extérieures. On peut penser au contraire que le nombre est le produit de l'évolution. De l'évolution biologique d'abord, qui implante dans le cerveau un sens de la numérosité, de l'évolution culturelle ensuite.

La Recherche : ***On sait depuis peu que l'homme n'est pas le seul animal à avoir le « sens des nombres ». La chose est-elle vraiment démontrée ?***

Stanislas Dehaene : Il faut d'abord s'entendre sur ce qu'on appelle « sens des nombres ». Lorsqu'on parle de représentation des nombres chez l'animal ou chez le très jeune enfant, on parle en fait de la perception de la numérosité. C'est la capacité, lorsqu'on voit un ensemble d'objets ou lorsqu'on entend plusieurs sons, de se représenter leur nombre, au moins de manière approximative. Cette faculté est maintenant bien établie chez plusieurs espèces : le pigeon, le rat, le singe, d'autres encore. Les expérimentateurs ont pu contrôler tous les paramètres non numériques, comme la densité, la taille des objets, et montrer que dans certaines situations l'animal détermine son comportement exclusivement en fonction du nombre perçu.

Le nombre n'est donc pas forcément lié au langage ?

Absolument. Ni les animaux ni d'ailleurs les bébés qui participent à ces expériences n'ont de représentation linguistique. Or, ils sont capables de faire la différence, par exemple, entre 8 et 16 objets.

Le bébé qui ne parle pas a-t-il une perception de la numérosité ?

Tout à fait. Les expériences faites avec des bébés sont du même type que celles faites avec les animaux, et les résultats sont comparables. Mais si les bébés et certains animaux savent faire la différence entre 8 et 16, ils ne peuvent faire la différence entre 15 et 16. Leur représentation des nombres est floue, approximative. Seul l'homme parlant accède à la représentation exacte de la quantité, à l'aide de symboles.

Est-ce à dire que le nombre est d'abord un produit de l'évolution ?

Il n'y a aucun doute là-dessus. Je peux même être plus précis : c'est un produit de certaines représentations cérébrales qui ont été implantées dans notre cerveau par l'évolution. C'est une construction du cerveau. Pour bien le comprendre, on peut comparer la perception de la numérosité à celle de la couleur. La couleur est une illusion : il n'y a pas de couleurs dans le monde extérieur, il y a des objets qui réfléchissent la lumière, il y a des longueurs d'onde, mais la couleur n'est ni la lumière ni la longueur d'onde. La couleur que nous percevons est le résultat d'un calcul réalisé par le cortex visuel et notamment l'aire V4. Je crois qu'il en va exactement de même pour le nombre : nous extrayons un paramètre qui est présent seulement à l'état latent dans le monde extérieur. Nous organisons le monde extérieur. Et si nous le faisons, c'est parce que nous sommes capables de percevoir qu'il y a des objets discrets.

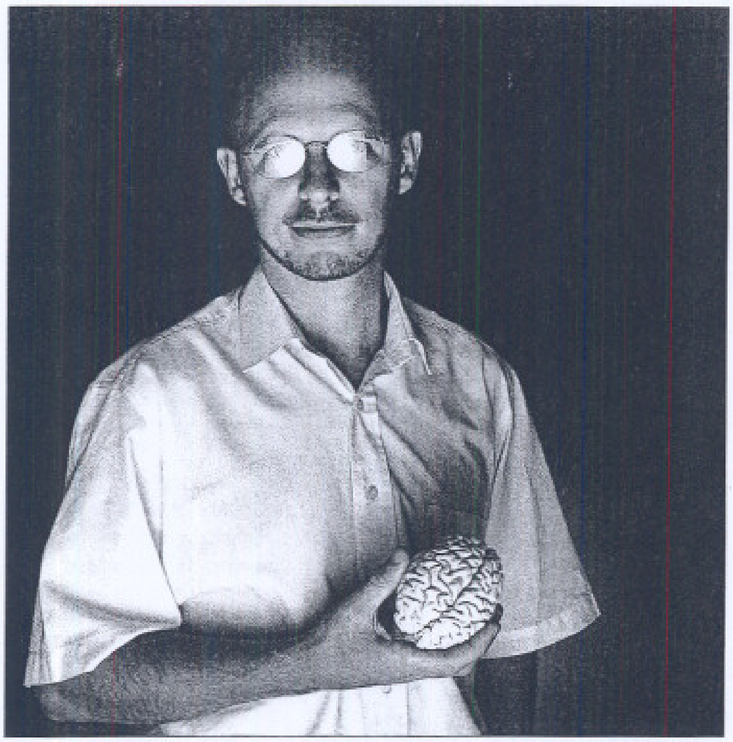
Une zone du cerveau semble spécialement impliquée dans la perception de la numérosité. Comment le sait-on ?

C'est une région centrale du cortex pariétal, dans les deux hémisphères, qui nous permet de nous représenter ces quantités approximatives. Nous le savons de deux manières différentes. Il y a d'abord les données issues des lésions cérébrales, et aujourd'hui c'est confirmé par l'imagerie cérébrale (voir l'encadré).

Après la Première Guerre mondiale, un médecin allemand a observé que certaines lésions de la région pariétale conduisaient non seulement à une incapacité à calculer, mais aussi plus généralement à se représenter ce que sont les nombres et quelles sont leurs relations. Ce type de patient n'est pas rare. J'en ai vu un qui ne savait plus répondre à des questions comme : « Qu'est-ce qu'il y a entre 2 et 4 ? » ou « Est-ce que 6 est plus grand que 5 ? » Or ce patient n'avait aucune difficulté à se rappeler ce qu'il y a entre B et D, ou entre mardi et jeudi. Le paramètre crucial semble être la représentation continue de la quantité, représentation liée à la distance entre les nombres. C'est cette représentation qui est déjà présente chez les animaux et les très jeunes enfants.

Comment le cerveau de l'homme manipule-t-il les nombres ?

Outre cette région centrale, il existe un circuit tout différent, qui fait intervenir la région frontale inférieure gauche, mais aussi, et peut-être de façon plus importante, ce que l'on appelle le gyrus angulaire, région impliquée dans le traitement lexical, le traitement des mots. Il semble qu'il existe une distinction radicale, dans le cerveau, entre le traitement approximatif des quantités, et le traitement exact de ce qu'on appelle les faits arithmétiques, les connaissances précises du type 3 x 9 = 27. Aucun animal, jusqu'à présent, n'a réussi à se représenter 3 x 9 = 27. Pour le calcul exact, celui dont les jeunes enfants aussi sont incapables, le circuit activé semble dépendre du langage. Notre cerveau stocke ces faits exacts en mémoire verbale, sous forme d'une espèce de chaîne de mots. Par exemple, le patient dont nous parlions tout à l'heure, qui ne savait pas ce qu'il y a entre 2 et 4, savait encore 3 x 9 = 27. Il le savait, mais sous la forme d'une récitation. On lui disait « 3 x 9 ? », il répondait « 27 », et



© Michel Labelle

A lire :

- S. Dehaene *et al.*, « Sources of mathematical thinking : behavioral and brain-imaging evidence », *Science*, *284*, 970, 1999.

La Recherche a publié :

(1) « La réalité mathématique archaïque », entretien avec Alain Connes, juin 2000.

immédiatement après disait : « Vous savez, je ne sais pas très bien ce que ça veut dire ! ». Si on lui demandait : « 4 x 8 ? », et qu'il avait oublié la réponse, il était incapable de retrouver le résultat. Il était incapable par exemple de faire 8 + 8 + 8 + 8.

Pensez-vous que l'on va continuer de progresser dans ces recherches sur les relations entre circuits cérébraux et mathématiques ?

Il y a immensément de choses à faire. C'est d'ailleurs un domaine en pleine expansion. Une question totalement ouverte est par exemple de savoir si les singes ou les très jeunes enfants utilisent déjà cette représentation pariétale. Peut-on observer un précurseur de la représentation pariétale des quantités ?

On commence à faire des expériences d'imagerie chez le bébé qui nous permettront peut-être de répondre à la question. De plus, nous travaillons aujourd'hui sur le nombre, mais c'est l'un des objets mathématiques les plus simples qui soient. Il faudra approfondir la recherche sur la représentation de l'espace, sur celle du temps. Le peu qu'on sache à cet égard n'a pas encore été mis en relation avec les objets mathématiques.

Etes-vous nombreux à mener ce type de recherche ?

Cela reste une très petite communauté : cinq ou six équipes dans le monde, notamment à Londres, à Bruxelles et au MIT, à Harvard.

Revenons sur la comparaison que vous faites entre les couleurs et les nombres. Même si les couleurs sont une reconstruction du cerveau, elles sont étroitement déterminées. Ce n'est pas le cas des objets mathématiques...

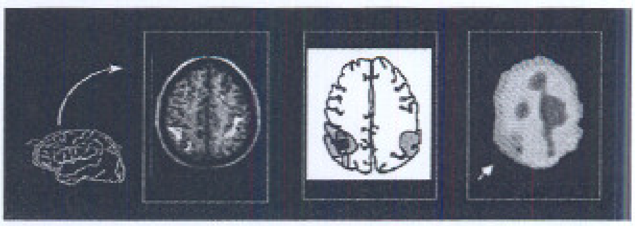
Il y a effectivement une différence fondamentale : c'est la productivité des mathématiques. Là où les couleurs ne permettent qu'un nombre très limité de combinaisons, les nombres servent de support à tout un échafaudage de constructions culturelles de plus en plus élaborées. La métaphore nombres/couleurs s'applique aux fondements des mathématiques : les mathématiques sont fondées, à l'origine, sur des représentations élémentaires, non décomposables, non analysables, non définissables même... Mais, en mathématiques, les objets mentaux permettent d'en construire d'autres, qui eux-mêmes peuvent se recombiner de très nombreuses manières, et parmi lesquelles le mathématicien sélectionne celles qui lui paraissent les plus utiles ou les plus élégantes. C'est ainsi que l'évolution culturelle prolonge l'évolution biologique.

Tous les objets mathématiques cependant, qu'il s'agisse de constructions mentales récentes ou de représentations issues de notre héritage biologique, sont avant tout des objets matériels dans le cerveau du mathématicien. Ils sont donc foncièrement limités par l'architecture du cerveau.

Comme d'autres, vous pensez que si nous avions vécu dans un monde par exemple purement liquide, ou fluide, nos mathématiques seraient différentes. Comment défendre une telle idée ?

Je tiens d'abord à préciser que je m'inscris en faux contre certains sociologues qui voient les mathé-

Acalculie et dyscalculie

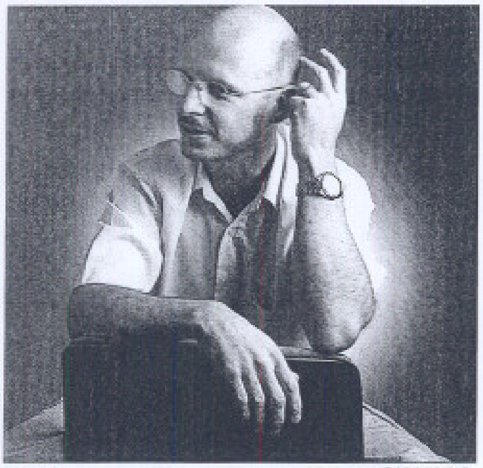


Lobule pariétal inférieur et représentation des nombres. Sur ces coupes horizontales du cerveau humain, l'avant de la tête est en haut de l'image, et l'hémisphère gauche apparaît à gauche. L'image de gauche montre, en fausses couleurs, le sillon intrapariétal s'activer lorsqu'une personne normale effectue des soustractions simples comme 11 – 7. L'image au centre représente les régions lésées par un accident vasculaire chez plusieurs patients adultes souffrant d'une acalculie (incapacité de calculer et de comprendre les nombres). Enfin, l'image de droite montre une anomalie du métabolisme de la créatine dans la même région chez un adulte souffrant d'une dyscalculie développementale, décrite par Levy et Reis et Grafman en 1999. En dépit de son intelligence normale, cette personne a souffert durant toute son enfance d'un grave retard en mathématiques, et particulièrement dans le domaine du calcul. L'ensemble de ces données suggère que, dès la naissance et dans toutes les cultures, la région pariétale inférieure joue un rôle crucial dans la représentation mentale des quantités numériques.

matiques comme une pure construction sociale. La valeur de π ne change pas selon les cultures. Nous avons tous le même cerveau. Les constructions mathématiques partent des mêmes fondements. La question est de savoir si les fondements pourraient être différents dans une autre espèce. Il me semble que ce n'est pas impossible. Si nous avons une représentation du nombre, c'est que nous vivons à une certaine échelle dans le monde physique. Echelle où il est légitime de considérer qu'il y a des objets détachables, déplaçables. Poincaré insistait beaucoup sur cette idée que notre géométrie vient de ce que nous pouvons manipuler, déplacer les objets dans le monde tridimensionnel. Je crois que si nous vivions à une échelle complètement différente, nous n'aurions pas forcément cette représentation-là, qui ne serait pas pertinente pour la survie de l'espèce. Notre cerveau produit des représentations très intuitives dans certains domaines comme celui des nombres, ou de la géométrie tridimensionnelle, mais il a ses limites, que l'on perçoit quand on essaie de manipuler des notions topologiques ou des espaces à plus de trois dimensions. Pourquoi ne pas imaginer qu'une autre espèce ayant connu une pression de sélection très différente n'aurait pas d'intuition dans les domaines où nous en avons, et au contraire des intuitions dans des domaines où nous n'en avons pas ?

Une telle idée est-elle testable ?

Probablement pas, puisque toutes les espèces que nous connaissons vivent à une échelle comparable. On m'a demandé de participer à une réflexion dans le cadre du programme SETI pour savoir si les extraterrestres auraient les mêmes nombres que nous... J'ai refusé ! Mais la dimension de la réflexion est intéressante. Elle nous aide à comprendre la nature des mathématiques. Elle suggère que les mathématiques ne portent probablement pas sur ces objets platoniciens auxquels la plupart des mathématiciens et des physiciens théoriciens veulent nous faire croire.



© Michel Labelle

Un mathématicien contemporain, Alain Connes, s'affiche comme platonicien. Mais à prendre ce qu'il dit à la lettre, il n'est pas si éloigné de vous. Il parle volontiers du « sens des nombres[1] ». Est-ce si différent du sens de la numérosité que vous évoquez ?

Il est très intéressant pour nous, du point de vue de la psychologie, d'examiner le point de vue de grands mathématiciens comme aujourd'hui Alain Connes, hier Poincaré, ou encore d'un physicien tel Einstein. Ce dernier soulignait que ses idées prenaient naissance sous forme d'« *images plus ou moins claires que je peux reproduire et combiner à mon gré* ». Ils nous fournissent des données introspectives qui peuvent conduire à une expérimentation psychologique ou en imagerie cérébrale. Nous avons cherché à étudier en laboratoire ce sens intuitif des mathématiques et on a pu montrer qu'effectivement il y a un côté non verbal, et même une dimension inconsciente.

Un certain nombre d'expériences démontrent en effet que l'accès au sens des nombres peut se faire de façon complètement inconsciente, sans qu'on ait l'impression d'avoir vu un chiffre quelconque. Il est donc vrai, d'une certaine manière, que le point de vue d'un Alain Connes rejoint le nôtre. Là où nous divergeons, c'est qu'Alain Connes voit ce sens comme donnant accès à une réalité extérieure préexistante et strictement mathématique. Je ne crois pas à cela. Je pense qu'il s'agit de création de régularités par notre cerveau. Ce qui est en jeu, c'est l'extraction, le raffinement de régularités qui sont déjà présentes en partie dans le monde extérieur mais qui ne sont pas strictement mathématiques.

Connes va très loin puisqu'il dit : « Je suis prêt à parier qu'on s'apercevra un jour que la réalité matérielle se situe en fait à l'intérieur de la réalité mathématique. » Peut-on envisager une procédure expérimentale qui permettrait de vous départager ?

Je ne sais pas si c'est testable. Je crois que les scientifiques opèrent souvent une confusion entre le modèle et la réalité. On le voit en mathématiques et aussi en physique théorique. Nous construisons des modèles mentaux, et ces constructions mentales finissent par devenir tellement familières, tellement intuitives, tellement automatisées – surtout pour les scientifiques de haut niveau – qu'elles deviennent aussi vraies qu'une réalité concrète. Mais le mathématicien oublie tout le processus de création qu'il y a eu derrière. Il finit par confondre les objets du modèle avec les objets de la réalité. Je pense pour ma part qu'il existe une distance irréductible entre les deux. Ainsi certains physiciens qui croient avoir une théorie de tout, qui pensent pouvoir capturer dans un sens très étroit tout ce qu'il y a à capturer dans la réalité physique, vivent une illusion complète. Notre appareil cognitif est limité. Il est suffisamment puissant pour arriver à comprendre certains aspects du monde physique, et peut-être même à se comprendre lui-même – c'est ce que nous faisons lorsque nous essayons de comprendre le cerveau –, mais il ne faut pas se leurrer, les représentations que nous sommes capables de manipuler sont très limitées. Je crois que c'est une erreur, peut-être liée à un sentiment d'orgueil, que d'être amené à penser que les objets que nous créons mentalement pourront fournir la description totale de la réalité physique extérieure.

Ce qui vous oppose à un Alain Connes est-il seulement de nature philosophique ou bien peut-on l'enraciner dans un processus de validation scientifique ?

Fondamentalement c'est bien sûr une question d'ordre philosophique, mais nous avons quand même à notre disposition, avec les nouvelles méthodes de l'imagerie cérébrale et des neurosciences cognitives, des moyens d'étudier le cerveau. Il me paraît possible d'arriver à démonter expérimentalement les mécanismes cérébraux des mathématiques. Une telle entreprise pourra-t-elle jamais démontrer la fausseté du platonisme ? Je ne crois pas. Ce sont des positions trop abstraites pour être réfutables facilement par l'expérience. Ce qu'on peut faire, c'est consolider le point de vue qu'il y a des représentations précoces dans le cerveau, des représentations prémathématiques et que les mathématiques se construisent dessus. De ce point de vue, ce serait un résultat fondamental de montrer que c'est bien la même région cérébrale, celle qui intervient au départ dans le traitement de la numérosité chez l'animal et chez l'enfant, qui va servir ensuite au traitement des objets mathématiques.

A la question « Qu'est-ce qu'un nombre ? », on peut donc, selon vous, apporter légitimement une réponse ?

Je crois que le nombre est le produit de deux évolutions : une première évolution qui implante dans le cerveau un sens approximatif, issu d'une régularité du monde physique à l'échelle où nous vivons, liée à l'existence d'objets discrets, et puis une deuxième évolution qui construit sur ce fondement. Les divers types de nombres conçus par les mathématiciens sont des constructions théoriques issues d'un fondement commun, le nombre entier.

Propos recueillis par Olivier Postel-Vinay