THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité : Sciences Cognitives

présentée par

Véronique IZARD

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Sujet de thèse :

INTERACTIONS ENTRE LES REPRÉSENTATIONS NUMÉRIQUES VERBALES ET NON-VERBALES :

ÉTUDE THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTALE

Soutenance effectuée le 11 janvier 2006 devant le jury :

Stanislas DEHAENE Directeur de thèse

François COURAUD Président

Xavier SERON Rapporteur

Michel FAYOL Rapporteur

Elizabeth SPELKE Examinateur

Giuseppe LONGO Examinateur

Marco ZORZI Examinateur

Je tiens à remercier particulièrement...

Stanislas Dehaene pour son soutien, son accueil, ses conseils, pour m'avoir amenée à travailler sur un sujet passionnant, des données exceptionnelles, qui a su être un encadrant dirigeant et exigeant, et en même temps m'octroyer de larges libertés (difficile alchimie! bravo); en qui tout étudiant peut trouver une source inépuisable d'enthousiasme, un modèle de rigueur scientifique, de créativité;

Les personnes avec qui j'ai été amenée à collaborer pendant ces années :

Ghislaine Dehaene-Lambertz avec qui j'ai réalisé les études sur les bébés. Pour son ingéniosité, sa ténacité, et sa disponibilité absolue;

Liz Spelke qui me comble de sa confiance et son affection, dont j'espère je serai à la hauteur;

Pierre Pica notre ambassadeur chez les Mundurucús, pour son engagement, ce qu'il parvient à réaliser qui, quoiqu'il en dise, est extraordinaire;

Michel Fayol et Xavier Seron qui me font l'honneur d'être rapporteurs de ce manuscrit, ainsi que Giuseppe Longo et Marco Zorzi qui ont accepté de participer au jury : puissiez-vous trouver dans cette lecture un petit peu de plaisir et pas trop d'ennui, et dans l'attente de la discussion que nous aurons ensemble;

la Fondation Volkswagen pour avoir organisé le programme EDCBS (European Diploma of Cognitive Sciences), pour lequel j'ai eu la chance d'être sélectionnée; pour tout ce que ces "cours" apportent en culture scientifique, en indépendance, en réflexion personnelle, dans les interactions professionnelles;

La fondation Fyssen grâce à laquelle je peux partir en stage post-doctoral;

L'Ecole Polytechnique et en particulier Dominique Grésillon qui ont été un soutien permanent;

L'INSERM pour son soutien financier, grâce auquel j'ai pu assister à des conférences dans le monde entier;

Le service de rééducation orthophonique de l'Hôpital Kremlin-Bicêtre, qui nous accueille pour tester les bébés;

Tous les membres de l'unité INSERM et du SHFJ, en particulier :

Christophe Pallier pour ses conseils savants, prodigués avec une générosité et une sagesse exemplaires;

Manuela Piazza, notre source d'auto-assurance à tous, pour son bon sens, sa perspicacité, sa confiance, son honnêteté intellectuelle, et son accent italien;

Claire Sergent qui est bien plus qu'une collègue, qui m'a écoutée dans mes longues diatribes professionnelles, non-professionnelles, à toute heure de la journée et de la nuit, merci Claire

Philippe Pinel pour sa vision hautement interprétée du monde, toujours drôle, fine, perspicace, et surprenante; et qui inspire à lui seul presque l'ambiance de ce laboratoire;

Teea Gliga avec qui j'ai découvert la joie de produire de la science jusqu'à des heures avancées de la nuit;

Catherine Soares, pour son aide à tester les bébés;

Marie-Hélène Baju, qui nous guide dans les dédales administratifs;

Claire Landmann avec qui nous partageâmes si bien la galère;

Joachim Forget en qui la relève est assurée;

Tous ceux qui m'ont aidée à pénétrer l'univers obscur de Latex : Philippe Ciuciu qui a pris des heures pour me montrer comment ça marche, Elie Favier qui s'est privé de son livre de référence pendant des mois, Jérôme Sackur qui assurait la hotline internet;

Les participants du "grand jeu concours de l'intégrale" $(\int_0^\infty x^{\frac{1}{k}} \exp\left(-\left(x-n^k\right)^2\right) dx \equiv \alpha n)$: Alice Patou, Vincent Bayle, et Laurent Bruneau qui ont gagné le grand prix, ainsi que Vincent Rohart, Michaël Blum, Julien Guyon et Jean-Baptiste Izard; et Philippe Ciuciu avec qui nous nous sommes découvert récemment un intérêt commun pour cette intégrale;

Le comité de lecture de mon introduction, qui m'ont aidée à la rendre plus compréhensible et moins bourrée de fautes : Bénédicte Augeard, Raquel Hadida, Clémentine Montay-Dubois, Jacqueline Izard, Etienne Espagne, Marie-Pauline Martin;

Les bébés et les parents qui ont gracieusement accepté de participer à notre étude, ainsi que tous ceux qui se sont portés volontaires pour mes expériences psychophysiques, sans savoir qu'ils allaient passer des heures à quantifier des nuages de points;

Et tous mes amis, ma famille, ils sont trop nombreux à citer, mes bosseurs de l'ombre qui m'ont aidée à me recentrer sur mon travail dans les moments où j'en étais le plus loin;

 $Enfin\ et\ bien\ s\^ur,\ je\ remercie\ Pac\^ome\ pour\ toutes\ ces\ ann\'ees,\ pour\ sa\ patience,\ sa\ douceur,\ ses\ attentions,\ son\ humour,\ son\ humilit\'e\ qui\ m'ont\ tant\ inspir\'ee$



Longtemps, je me suis couché de bonne heure. Parfois, à peine ma bougie éteinte, mes yeux se fermaient si vite que je n'avais pas le temps de me dire : "Je m'endors". Et, une demi-heure après, la pensée qu'il était temps de chercher le sommeil m'éveillait; je voulais poser le volume que je croyais avoir encore dans les mains et souffler ma lumière; je n'avais pas cessé en dormant de raisonner et chercher la démonstration de ce que je venais de lire, mais ces réflexions avaient pris un tour particulier; il me semblait que j'étais moi-même une matrice, avec des propriétés de parallèlisme. Cette croyance survivait pendant quelques secondes à mon réveil; elle ne choquait pas ma raison mais pesait comme des écailles sur mes yeux (...).

d'après M. Proust...

Table des matières

111	10100	1400101	i generale	4
1	\mathbf{Les}	nomb	res, les mathématiques, et le langage	3
	1.1	A l'or	igine des objets mathématiques	3
		1.1.1	Platonistes, formalistes et intuitionistes	3
		1.1.2	Les nombres	5
	1.2	Relati	ons entre le langage et la pensée	7
		1.2.1	L'influence de la forme de la langue : l'exemple de la phonologie	8
		1.2.2	Concepts et catégories linguistiques	S
		1.2.3	Les "effets de bord" du langage	13
	1.3	Organ	isation du manuscrit	14
Ι	Étı	ude de	es représentations analogiques, non-verbales de la numérosité	17
2	Rés	m sultats	expérimentaux	19
	2.1	Cogni	tion numérique chez l'animal	19
		2.1.1	Introduction	19
		2.1.2	Premiers indices : tâches de production	20
		2.1.3	Discrimination de deux numérosités	22
		2.1.4	Opérations arithmétiques sur les numérosités	27
		2.1.5	Données électrophysiologiques	30
		résun	né : Représentation de la numérosité chez les animaux	32
	2.2	Cogni	tion numérique chez le bébé	33
		2.2.1	Introduction	33
		2.2.2	Premières observations	33
		2.2.3	Les contrôles nécessaires	34
		2.2.4	Transfert entre modalités	35
		2.2.5	Discrimination de grandes numérosités	37
		résun	né : Représentation de la numérosité chez les bébés	39
	2.3	Cogni	tion numérique chez l'adulte	40

		2.3.1	Traitement de la numérosité des stimuli non symboliques	40
		résun	né : Estimation de la numérosité des stimuli	48
		2.3.2	Traitement de stimuli numériques symboliques	49
		résun	né: Utilisation des représentations sémantiques de numérosité chez l'adulte	56
	2.4	Synth	èse : lois psychophysiques sur les numérosités	57
		2.4.1	Loi de Weber ou Loi de Proportionalité	57
		2.4.2	Variabilité scalaire	63
3	Le	modèle	e de la ligne numérique interne	65
	3.1	Introd	$ uction \ldots \ldots$	65
		3.1.1	La ligne numérique en tant que simple métaphore	65
		3.1.2	Jusqu'où croire à la métaphore de la ligne numérique?	68
		3.1.3	Pourquoi la métaphore de la ligne numérique possède-t-elle un si fort pouvoir prédictif?	70
	3.2	Échell	e interne de la ligne numérique	71
		3.2.1	Fechner et les partisans de l'échelle logarithmique	71
		3.2.2	Stevens et les partisans de l'échelle puissance	73
		3.2.3	Gallistel, en faveur d'une échelle interne linéaire	74
		3.2.4	La ligne numérique est-elle compressive ? Quelques résultats empiriques contestés	75
	résu	ımé : I	a métaphore de la ligne numérique	79
4	Mo	dèle m	athématique de la ligne numérique interne	81
	4.1			
		Notio	ns sur la loi de Thurstone	81
	4.2			81 83
		Trois	alternatives pour l'échelle interne	
	4.2	Trois	alternatives pour l'échelle interne	83
	4.2	Trois Autou	alternatives pour l'échelle interne	83 84
	4.2	Trois Autou	alternatives pour l'échelle interne	83 84 84
	4.2	Trois Autou 4.3.1 4.3.2	Alternatives pour l'échelle interne	83 84 84 85
	4.2	Trois Autou 4.3.1 4.3.2 4.3.3	alternatives pour l'échelle interne	83 84 84 85 86
	4.2	Trois Autou 4.3.1 4.3.2 4.3.3 4.3.4 4.3.5	Alternatives pour l'échelle interne	83 84 84 85 86 88
	4.2 4.3	Trois Autou 4.3.1 4.3.2 4.3.3 4.3.4 4.3.5	r de la loi de Weber	83 84 84 85 86 88 92
	4.2 4.3	Trois Autou 4.3.1 4.3.2 4.3.3 4.3.4 4.3.5 Estim	r de la loi de Weber Plusieurs formulations de la loi de Weber Démonstration de l'équivalence entre la loi de Weber et la règle du ratio Compatibilité des trois échelles internes avec la loi de Weber Fraction de Weber comportementale et fraction de Weber interne Peut-on généraliser le modèle à une fraction de Weber non constante? Notations Notations	83 84 84 85 86 88 92 93
	4.2 4.3	Trois Autou 4.3.1 4.3.2 4.3.3 4.3.4 4.3.5 Estim 4.4.1	r de la loi de Weber Plusieurs formulations de la loi de Weber Démonstration de l'équivalence entre la loi de Weber et la règle du ratio Compatibilité des trois échelles internes avec la loi de Weber Fraction de Weber comportementale et fraction de Weber interne Peut-on généraliser le modèle à une fraction de Weber non constante? ation et loi de la variabilité scalaire Notations Étude d'un modèle de référence	83 84 84 85 86 88 92 93 94
	4.2 4.3	Trois Autou 4.3.1 4.3.2 4.3.3 4.3.4 4.3.5 Estim 4.4.1 4.4.2	r de la loi de Weber Plusieurs formulations de la loi de Weber Démonstration de l'équivalence entre la loi de Weber et la règle du ratio Compatibilité des trois échelles internes avec la loi de Weber Fraction de Weber comportementale et fraction de Weber interne Peut-on généraliser le modèle à une fraction de Weber non constante? ation et loi de la variabilité scalaire Notations Étude d'un modèle de référence Modèle de la tâche d'estimation	83 84 84 85 86 88 92 93 94
	4.2 4.3	Trois Autou 4.3.1 4.3.2 4.3.3 4.3.4 4.3.5 Estim 4.4.1 4.4.2 4.4.3	r de la loi de Weber Plusieurs formulations de la loi de Weber Démonstration de l'équivalence entre la loi de Weber et la règle du ratio Compatibilité des trois échelles internes avec la loi de Weber Fraction de Weber comportementale et fraction de Weber interne Peut-on généraliser le modèle à une fraction de Weber non constante? ation et loi de la variabilité scalaire Notations Étude d'un modèle de référence Modèle de la tâche d'estimation	83 84 84 85 86 88 92 93 94 94 98

TABLE DES MATIÈRES iii

5	Val	idatior	n expérimentale du modèle	107			
	5.1	Comp	paraison et détection de changement sur des numérosités	107			
		5.1.1	Méthodes expérimentales	107			
		5.1.2	Modèle théorique	110			
		5.1.3	Résultats	116			
	5.2	Addit	ion et soustraction de numérosités	119			
		5.2.1	Méthodes expérimentales	119			
		5.2.2	Modèle théorique	120			
		5.2.3	Résultats	122			
	5.3	Estim	ation de numérosité	125			
		5.3.1	Méthodes expérimentales	126			
		5.3.2	Prédictions du modèle	128			
		5.3.3	Résultats	132			
	5.4	Discus	ssion générale	142			
		5.4.1	Sur la non-linéarité de l'échelle numérique	143			
		5.4.2	De la précision de la représentation de numérosité	145			
		5.4.3	Du processus de calibration	147			
	résu	umé : V	Validation expérimentale du modèle	149			
II	Se	ensibil	ité des bébés à la numérosité	151			
6	Cor	rélats	cérébraux des représentations numériques	153			
	6.1	•					
	6.2	La pa	•				
		6.2.1	rtie horizontale du sillon intrapariétal : un code quantitatif	101			
			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				
		6.2.2	Activation de la PHSI dans des opérations arithmétiques	155			
		6.2.2 6.2.3	Activation de la PHSI dans des opérations arithmétiques	155			
			Activation de la PHSI dans des opérations arithmétiques	155 155 156			
		6.2.3	Activation de la PHSI dans des opérations arithmétiques	155 155 156 158			
		6.2.3 6.2.4	Activation de la PHSI dans des opérations arithmétiques	155 156 158 160			
	6.3	6.2.3 6.2.4 6.2.5 6.2.6	Activation de la PHSI dans des opérations arithmétiques	155 156 158 160 162			
	6.3	6.2.3 6.2.4 6.2.5 6.2.6	Activation de la PHSI dans des opérations arithmétiques	155 156 158 160 162			
	6.3	6.2.3 6.2.4 6.2.5 6.2.6 Autre	Activation de la PHSI dans des opérations arithmétiques	155 156 158 160 162 164			
	6.3	6.2.3 6.2.4 6.2.5 6.2.6 Autre 6.3.1	Activation de la PHSI dans des opérations arithmétiques	155 156 158 160 162 164			
	6.3	6.2.3 6.2.4 6.2.5 6.2.6 Autre 6.3.1 6.3.2	Activation de la PHSI dans des opérations arithmétiques	155 156 158 160 162 164 164			
	6.3	6.2.3 6.2.4 6.2.5 6.2.6 Autre 6.3.1 6.3.2 6.3.3	Activation de la PHSI dans des opérations arithmétiques	155 156 158 160 162 164 164 167 168			
		6.2.3 6.2.4 6.2.5 6.2.6 Autre 6.3.1 6.3.2 6.3.3	Activation de la PHSI dans des opérations arithmétiques	155 156 158 160 162 164 164 165 168			

	résu	umé : (Corrélats cérébraux de la cognition numérique	. 171			
7	Rep	présent	tation des petits nombres	173			
	7.1	Des ré	ésultats surprenants	. 173			
	7.2	.2 La théorie des pointeurs attentionnels					
	7.3	Addit	ion et soustraction de petits nombres	. 175			
		7.3.1	Études chez le bébé	. 175			
		7.3.2	Études chez les animaux	. 177			
	7.4	Traces	s d'un système séparé pour les petits nombres chez l'adulte	. 177			
	résu	umé : I	Le cas des petits nombres	. 180			
8	Rép	onse (cérébrale à la numérosité chez le bébé	181			
	8.1	Introd	luction	. 181			
	8.2	Métho	odes expérimentales	. 182			
		8.2.1	Stimuli	. 182			
		8.2.2	Procédure	. 184			
		8.2.3	Sujets	. 185			
		8.2.4	Enregistrement et analyse de l'électroencéphalogramme	. 185			
	8.3	tats	. 188				
		8.3.1	Décours temporel de l'activité cérébrale électrique	. 188			
		8.3.2	Recherche des effets observés dans les expériences précédentes	. 191			
		8.3.3	Description de l'effet de changement d'objet	. 192			
	8.4	Discus	ssion	. 193			
	rési	umé : I	Recherche des corrélats cérébraux du traitement de la numérosité chez le bébé	. 196			
ΙΙ	т (Cognit	ion numérique en l'absence de numéraux	197			
11.	1 (Jogiii	ion numerique en i absence de numeraux	197			
9			et langage	199			
	9.1		e des systèmes linguistiques numériques existants				
		9.1.1	Systèmes "primitifs" : un, deux, beaucoup				
		9.1.2	Des procédés concrets qui ont permis de dépasser 4				
		9.1.3	Apparition des noms de nombres				
		9.1.4	Le système de numération moderne	. 202			
		9.1.5	Le système occidental : des mots au sens exact ou approximatif	. 203			
	9.2	Le lan	ngage comme support à l'arithmétique exacte				
		9.2.1	Le langage comme outil de calcul	. 205			
		9.2.2	Le rôle du langage dans le développement de la cognition numérique	. 207			
	résu	umé : I	Rôle du langage dans la cognition numérique	. 212			

TABLE DES MATIÈRES v

10 Cognition numérique chez les Mundurucús	213
10.1 Introduction	213
10.2 Méthodes générales	216
10.2.1 Participants	216
10.2.2 Procédure	219
10.3 Expérience 1 : dénomination de nuages de points (2004) $\dots \dots \dots$	219
10.4 Expériences 2a et 2b : traitement des grandes numérosités (2004)	221
10.4.1 Expérience 2a : comparaison	221
10.4.2 Expérience 2b : addition et comparaison	224
10.4.3 Discussion expériences 2a et 2b	225
10.5 Expérience 3 : comparaison d'ensembles cachés	225
10.6 Expérience 4a et 4b : arithmétique exacte	230
10.6.1 Expérience 4a : soustraction exacte (2004)	230
10.6.2 Expérience 4b : égalité exacte entre deux ensembles (2005)	233
10.7 Expériences 5a et 5b : signification des numéraux	239
10.7.1 Expérience 5a : test sur la précision des numéraux	239
10.7.2 Expérience 5b : association des numéraux aux quantités qu'ils représentent	243
10.8 Discussion générale	248
10.8.1 Représentations numériques non-verbales	249
10.8.2 Le concept de nombre exact des Mundurucús	250
10.8.3 Attribution d'une signification aux numéraux	250
10.8.4 Conséquences pour les hypothèses de Whorf et de Chomsky	252
10.8.5 Perspectives	254
résumé : Cognition numérique chez les Mundurucús $1/2$	255
Conclusion générale 2	257
11 Plusieurs étapes du développement de la cognition numérique 2	259

Introduction générale

Chapitre 1

Les nombres, les mathématiques, et le langage

1.1 A l'origine des objets mathématiques

1.1.1 Platonistes, formalistes et intuitionistes

D'où viennent les objets mathématiques, et le fait qu'on puisse les appréhender? Ces objets font-ils partie d'une réalité extérieure, ou s'agit-il d'une construction purement artificielle de l'esprit humain? Selon Platon, les objets mathématiques existent indépendamment du mathématicien qui les observe, avec des propriétés intrinsèques. Le rôle du mathématicien est donc de découvrir, d'observer la réalité mathématique, et d'en rendre compte. Le mot même de théorème (spectacle en grec) est hérité de ce point de vue, où la démonstration consiste à mettre en lumière une propriété remarquable. Jusqu'au vingtième siècle, de nombreux mathématiciens ont soutenu que les mathématiques décrivaient un monde réel, frappés par la vivacité de leurs intuitions¹.

Cependant, l'introduction d'objets radicalement contre-intuitifs, comme les géométries non-euclidiennes, avait commencé à ébranler les convictions. Les cinq principes d'Euclide en géométrie semblaient tellement évidents, tant ils suivent fidèlement nos intuitions, que jusqu'alors ils passaient pour être nécessaires : dans l'idée des mathématiciens, définir une géométrie qui ne reposait pas sur ces principes aurait inévitablement abouti à une théorie pleine de contradictions. Des cinq principes d'Euclide, Gauss (1817) eut néanmoins l'idée de réfuter le dernier (par un point, il ne passe qu'une droite parallèle à une droite donnée); ses intuitions furent concrétisées plus de 50 ans plus tard lorsque Beltrami (1868) et Klein (1971) donnèrent des modèles de surfaces sur lesquelles ce principe n'est pas valide (sur ces surfaces, plusieurs parallèles à une droite donnée peuvent être tracées à partir d'un point). Ainsi, selon le contexte dans lequel on se plonge, un objet à priori aussi intuitif qu'une droite ou un point peut avoir des propriétés radicalement différentes. Comment soutenir

¹I believe that mathematical reality lies outside us, that our function is to discover or observe it, and that the theorems which we prove, and which we describe grandiloquently as our "creations", are simply the notes of our observations. G.H. Hardy, A Mathematician's Apology (London 1941).

alors que ses propriétés puissent être intrinsèques?

Parallèlement, partant des réflexions de Leibniz (1670) sur les notations en mathématiques, les efforts de la communauté pour introduire une plus grande rigueur dans les raisonnements mathématiques aboutirent au bout de deux siècles au langage logique (ou formalisme) de Frege (1880), un formidable outil pour exprimer des assertions de manière non-ambigüe (en particulier grâce à l'introduction des symboles quantificateurs : $\exists x$ "il existe x", $\forall x$ "pour tout x"), et garantir que le raisonnement soit valide à toutes les étapes. Incarnant à l'extrême les idées du courant formaliste, Hilbert refusait de prêter une signification au langage formel : pour lui les mathématiques ne sont qu'un jeu fondé sur quelques règles de déduction simples, que l'on applique à des signes sans signification. Une démonstration ne serait qu'un enchaînement fini, arbitraire, de symboles, généré à partir d'un ensemble fini de propriétés élémentaires (les axiomes) et de règles de déduction à appliquer mécaniquement. Il avait conjecturé que l'on pourrait démontrer la cohérence et la complétude de l'arithmétique formelle : d'une part, selon lui, les axiomes ne génèrent pas d'incohérences (aucune proposition ne serait à la fois vraie et fausse). D'autre part, partant d'une proposition formelle, Hilbert pense qu'on peut toujours démontrer soit que cette proposition est vraie, soit qu'elle est fausse.

Les fameux théorèmes d'incomplétude de Gödel mirent fin au programme de Hilbert, et à l'utopie formaliste. Gödel démontra non seulement qu'une axiomatique ne peut pas être complète si elle est cohérente, mais encore que la cohérence de l'axiomatique ne peut elle-même être démontrable à l'intérieur de cette axiomatique. La démonstration de Gödel consiste à exhiber une proposition du langage formel, connue sous le nom de proposition G, reprenant l'idée du paradoxe du menteur. La signification de la proposition G est "je ne suis pas démontrable" : si on arrivait à démontrer G, cette proposition deviendrait nécessairement fausse, ce qui introduirait une contradiction dans la théorie. Gödel démontra dans un deuxième théorème qu'on peut également déduire formellement la proposition G de la propriété de cohérence de l'axiomatique : alors, si on pouvait démontrer formellement que l'axiomatique est cohérente, on obtiendrait une démonstration formelle de G, ce qui n'est pas possible. Les deux résultats de Gödel ne concernent pas une axiomatique particulière, mais tout système formel défini à partir d'un nombre fini d'axiomes, anéantissant par là-même tous les espoirs de Hilbert.

Si réduire les mathématiques à un calcul formel est une entreprise vaine, les théorèmes de Gödel réhabilitent la place de l'intuition dans l'exercice des mathématiques, redonnant du crédit aux idées de Poincaré, dont l'impact avait été réduit par la parution des puissants formalismes de Frege et Hilbert. Poincaré reconnaissait la place de l'intuition dans la trouvaille en mathématiques² et sa complémentarité avec le raisonnement logique : selon lui la logique permettait de traquer d'éventuelles erreurs commises en raisonnant intuitivement, et la validité d'une démonstration ne pouvait être admise sans qu'elle soit transcrite de manière formelle. Cependant, il considérait que la donnée d'une preuve formelle ne suffisait pas à accéder à la connaissance des propriétés qu'elle décrit. Dans le même ordre idée, il se montra sceptique sur le programme de Hilbert : comment justifier que le choix des axiomes se portent sur des principes conformes à notre intui-

² It is by logic we prove, it is by intuition that we invent. Mathematical definitions in education (1904).

tion, si les mathématiques ne sont qu'un jeu formel³? Poincaré n'attribuait pas une existence intrinsèque aux objets mathématiques, mais leur donnait une origine humaine : c'est pour les avantages qu'ils offrent face aux pressions de la sélection naturelle que l'être humain aurait été doté de la faculté de créer de tels objets⁴. Ses idées sont ainsi très proches du projet qui anime nos recherches sur les représentations non-verbales des nombres : nous pensons que les ensembles numériques, tels qu'on les connaît en mathématiques, sont des produits de notre cerveau, nés de son organisation interne. Ainsi le mathématicien ne doit pas découvrir une réalité extérieure à lui, mais pousser à outrance l'exercice de génèse du concept mathématique par une "machine surentraînée" : son cerveau. En quelque sorte, on peut dire qu'il lui faut découvrir et non créer des réalités préexistantes. Elles existent comme attracteurs de la structure du cerveau humain avant d'être mises en forme par les mathématiciens.

1.1.2 Les nombres

Vocabulaire

Nous introduisons ici le terme de numérosité qui sera largement utilisé tout au long du manuscrit. Par numérosité, nous entendons la propriété d'une collection d'objets précisant la quantité d'objets qu'elle contient. Le terme numérosité s'oppose à celui de nombre en ceci qu'il désigne un attribut d'un objet du monde, alors que le nombre est un objet autonome, qu'on peut manipuler. De plus la numérosité réfère exclusivement au cardinal des stimuli non-symboliques, alors que des significations diverses peuvent être attribuées à un nombre : il a une signification quantitative (numérosité d'un ensemble), mais peut aussi représenter une position dans une séquence ordonnée, servir de repère pratique (un numéro de dossier), voire encore pour certains nombres posséder fortuitement d'autres significations (un modèle de voiture, une marque de bière, une date de l'histoire, etc). Par extension du terme numérosité, nous créons et utiliserons l'adjectif numéreux, qui caractérise un ensemble dont la numérosité est élevée.

Enfin nous parlerons aussi des numéraux, termes qui désignent les nombres dans une langue. Les numéraux les plus classiques sont les noms de nombres tels qu'ils apparaissent dans la liste de comptage (un, deux, trois...), mais nous en avons aussi d'autres, comme les numéraux approximatifs (une douzaine). Dans certaines langues, les numéraux peuvent être des expressions faites de plusieurs mots; dans d'autres, les numéraux ne sont pas des mots mais des gestes. Nous étendons la signification du terme numéraux à ces cas inhabituels.

A côté des numéraux, d'autres termes de la langue permettent d'exprimer des jugements sur des quantités (un peu, beaucoup, ...) : nous les appellerons les quantifieurs, au risque de commettre un abus de langage aux yeux des experts en linguistiques. L'emploi du terme quantifieur en linguistique suppose que le mot en

³ The logical point of view alone appears to interest Hilbert. Being given a sequence of propositions, he finds that all follow logically from the first. With the foundations of this first proposition, with its psychological origin, he does not concern himself. Foundations of geometry (1902).

⁴(...) by natural selection our mind has adapted itself to the conditions of the external world. It has adopted the geometry most advantageous to the species or, in other words, the most convenient. Geometry is not true, it is advantageous. Science and Méthode (1908).

question possède un ensemble de propriétés syntaxiques pointues, tout à fait hors de notre propos. Nous préférons les ignorer, quitte à employer parfois le terme quantifieur de façon abusive.

Intuitions psychologiques et théories mathématiques

La définition des nombres fonde l'arithmétique et les mathématiques. Au fil des siècles, les mathématiciens ont réussi à construire une théorie qui unifie les concepts de nombres entiers, naturels ou signés; ces nombres sont regroupés en ensembles qui ont chacun leurs caractéristiques propres, exprimables en termes formels. Loin de ce niveau d'abstraction, chacun de nous possède une idée intuitive de ce que sont les nombres, qu'ils soient entiers, réels, relatifs... Nous sommes tous capables, en termes naïfs, d'exprimer ce qui distingue toutes ces sortes de nombres, de les utiliser même, en nous adaptant à la situation présente. De ces idées intuitives est née la théorie des nombres. Comme l'a souligné Poincaré à propos de la géométrie, les axiomes qui décrivent les entiers, tels que ceux que Péano imagina en 1889, ne peuvent être considérés comme étant entièrement arbitraires, ils nous apparaissent conformes à notre intuition, ils ont été façonnés à partir de notre intuition, dans un but descriptif.

Cependant, c'est seulement au terme d'un processus long, riche en essais parfois abandonnés, progressivement affinés, que les ensembles numériques ont été définis. Les axiomes de Péano, s'ils restent la meilleure définition axiomatique de l'arithmétique, sont néanmoins assez laxistes pour s'appliquer, en plus de l'ensemble des entiers naturels, à des objets mathématiques monstrueux, les modèles non-standard de l'arithmétique. Quant aux nombres réels, il a fallu attendre Weierstrass (1861), Dedekind et Cantor (1873-1880), pour définir la continuité, propriété qui fonde cet ensemble. Ces mathématiciens furent les premiers à parvenir à construire le continu à partir du discret de manière rigoureuse, définissant son caractère infini, ainsi que les opérations de passage à la limite.

A y regarder de plus près, sur le plan cognitif comme en mathématiques, l'unification des nombres entiers et des nombres réels au sein d'un même concept (le nombre) ne devrait pas être une évidence. Les nombres entiers caractérisent une quantité d'éléments dans un ensemble : aussi leur utilisation requiert à la fois que l'on distingue les éléments à l'intérieur de l'ensemble, et que l'on reconnaisse que tous ces éléments sont regroupés dans le même ensemble. Les nombres réels, quant à eux, caractérisent la mesure d'une quantité insécable. Ils portent en eux la constatation que toutes les valeurs sont possibles (c'est la condition de continuité), du moins dans les limites de notre expérience sensible. L'expression d'une quantité réelle ne repose en aucun cas sur la division d'un ensemble en items séparés, elle s'apparente à la mesure d'un objet de taille, volume (ou tout trait mesurable) variable. Pourtant, bien plus naturellement qu'en mathématiques, nous utilisons des opérations cognitives où les notions de nombres entiers et de quantités réelles se confondent. Par exemple, la prise d'une mesure, qui consiste à évaluer sa valeur avec une précision finie, donnée par l'unité de mesure, transforme une grandeur continue en une évaluation discrète de cette grandeur. Si on utilisait une infinité d'unités de mesure, alors seulement on pourrait exprimer des longueurs avec une précision arbitraire. Mais à partir du moment où on fixe les unités de mesure (ce qui est finalement toujours le cas) les valeurs ne sont exprimées que de manière discrète, avec une précision donnée. Donnons un deuxième exemple : lorsqu'on

estime grossièrement le nombre d'éléments dans un ensemble (par exemple, 500 personnes dans un avion), le nombre que l'on donne, bien qu'il s'agisse d'un nombre entier, estime à la fois la quantité d'éléments présents et la précision de l'estimation : si on donne une estimation de 500 personnes, il peut bien y en avoir 534, si l'estimation est de 510, tout au plus il peut y en avoir 515. L'estimation approximative d'un cardinal introduit la notion de continuité dans les nombres entiers : la réponse que l'on donne ne désigne pas une quantité définie précisément comme le sont les nombres entiers, mais un intervalle de valeurs.

A côté de cette étonnante facilité à manipuler tous les types de nombres, la difficulté que la communauté des mathématiciens a éprouvée à transcrire nos intuitions dans un langage formel semble paradoxale; elle révèle à quel point les formalismes sont inadaptés à décrire nos intuitions. D'où vient ce concept de nombre (entiers naturels, nombres réels) pour lesquels nous avons des intuitions sans parvenir à les définir? Pourquoi les mathématiques ont-ils éprouvé le besoin de regrouper ces deux types de nombres au sein d'un même ensemble? Pourquoi la frontière entre ensembles de nombres continus et discrets est-elle si poreuse dans la cognition numérique? Afin d'aborder ces questions, nous nous sommes efforcés de caractériser le format dans lequel le cerveau encode les numérosités, avec l'hypothèse que nos intuitions sur les nombres émergent à partir de ce code cérébral, façonné par l'évolution naturelle.

1.2 Relations entre le langage et la pensée

En plus de nourrir la réflexion sur l'origine des objets mathématiques, l'étude de la cognition numérique nous permet d'aborder la question des rapports entre le langage et la pensée. Les nombres se trouvent au carrefour entre des intuitions sur les quantités, qui semblent héritées de la phylogénèse, et un système verbal performant pour désigner et manipuler ces quantités; or, ce dernier système, loin de se limiter à reproduire les possibilités de nos intuitions, les surpasse en précision et puissance. Ainsi, alors que nos intuitions de quantités semblent ne pouvoir être qu'approximatives (comme lorsqu'on estime qu'il y a à peu près 500 personnes dans un avion), les numéraux de la langue permettent de noter n'importe quel entier à l'unité près. Jusqu'où situer l'apport des numéraux, des chiffres écrits, et des procédures de calcul qui leur sont associées : ont-ils permis d'introduire de nouveaux concepts numériques transcendant nos intuitions non-verbales, ou ont-ils, au contraire, été développés pour rendre compte de propriétés des nombres déjà reconnues avant leur introduction? En d'autres termes, les concepts numériques précèdent-ils l'acquisition des numéraux (dans l'histoire, et au niveau du développement de l'enfant), ou est-ce l'apprentissage des numéraux qui génère le développement de nouveaux concepts numériques?

Posée de manière plus générale, cette question revient à se demander si la langue qu'on parle joue un rôle déterminant sur la cognition. On peut l'entendre à plusieurs niveaux, que l'exemple suivant nous aidera à expliciter. La langue des Esquimaux distingue plus de vingt types différents de neige, là où nous n'avons qu'un seul mot. On peut imaginer que, sous l'effet de l'apprentissage de ces mots, les perceptions mêmes des enfants Esquimaux divergent progressivement de celles des enfants élevés dans d'autres communautés (hypothèse dite de Sapir-Whorf): dans un environnement enneigé, ils percevraient des frontières saillantes

entre différentes catégories de neige, là où les autres ne verraient qu'une uniformité blanche. Selon une autre alternative, l'influence de la langue se situerait à un plus haut niveau, soit au niveau des catégories conceptuelles : comme les Esquimaux, des Français seraient capables de percevoir les différences entre deux types de neiges correspondant à deux mots différents en langue esquimau, mais un Français catégoriserait toutes ses perceptions sous le même concept, c'est-à-dire que ces deux neiges lui sembleraient équivalentes. Quel que soit le type de neige qui tombe, il interpréterait cet événement de la même façon, en déduirait les mêmes informations. L'Esquimau, au contraire, serait capable de dériver des prédictions différentes à ces deux événements (comment la neige va réagir au moment où on marchera dessus, combien de temps elle tiendra, quelle température il fait, etc). C'est en apprenant à se servir des mots de leur langue que les Esquimaux parviendraient à développer des concepts différenciés pour les neiges, concepts absents chez les Français. A l'inverse, on peut imaginer un scénario où les concepts seraient acquis complètement indépendamment de la langue. Le langage ne serait qu'un outil pour exprimer ses propres idées et comprendre les idées des autres. La richesse du lexique de neige chez les esquimaux refléterait simplement un besoin plus important de communiquer sur ces questions que chez les autres civilisations; si les Esquimaux ont un bagage conceptuel plus riche que d'autres civilisation, c'est leur expérience avec la neige et non l'apprentissage de leur langue qui leur aurait permis de le développer.

1.2.1 L'influence de la forme de la langue : l'exemple de la phonologie

Sans parler du sens des mots, la forme particulière de la langue maternelle influence en profondeur notre perception de la parole. Chaque langue contient un ensemble de phonèmes propre, répertoire de sons qui sont autant de briques élémentaires à l'aide desquelles sont construits les mots. Ce répertoire différe d'une langue à l'autre, partitionnant l'espace des sons émissibles en différentes catégories. A l'intérieur d'une catégorie phonétique, les variations accoustiques sont difficilement perceptibles pour les locuteurs, par contre, dès qu'on traverse une frontière entre deux catégories phonétiques, le son est immédiatement interprété comme un phonème différent. Par exemple, si l'on synthétise des sons qui varient de manière continue entre le /p/ et le /b/, cette séquence sonore n'est pas perçue comme une suite continue : au contraire, à un moment précis, on entend un basculement entre /p/ et /b/. La position à laquelle ce basculement se produit est très stable pour tous les locuteurs d'une langue et définit la frontière entre les catégories phonétiques. Comme ces frontières sont placées différemment d'une langue à l'autre, les performances des locuteurs varient drastiquement selon la langue qu'ils parlent : ainsi les japonais éprouvent de grandes difficultés à distinguer le contraste entre le /r/ et le /l/, un contraste qui n'existe pas dans leur langue [Goto, 1971]. De la même façon, d'autres langues possèdent des contrastes que les Français n'entendent pas, en Hindi par exemple, où il existe deux sortes de /d/, un /d/ dental articulé comme le nôtre, et un /d/ rétroflexe articulé sur le palais [Golestani et al., 2002]. Lorsqu'on entend de la parole, les sons sont donc perçus différemment selon les règles phonétiques de la langue qu'on parle : le même signal n'est pas interprété de la même façon par un Français, un Anglais, un Hindi. L'effet de la phonologie se situe à un niveau perceptif.

Par quel mécanisme la forme de la langue parvient-elle à modifier des représentations perceptives? La

sensibilité aux contrastes phonétiques n'est pas créée ab nihilo : bien au contraire, les bébés viennent au monde avec un répertoire de contrastes phonétiques très large. Alors que les adultes présentent des difficultés avec les contrastes phonétiques étrangers à leur langue, les bébés possèdent la capacité de distinguer des contrastes minimaux [Mehler and Dupoux, 1990, Miller and Eimas, 1983] dès les premiers mois. Ces catégories "universelles" initiales sont ensuite transformées sous l'effet de l'écoute de la langue maternelle : déjà à 6 mois, les bébés commencent à montrer un comportement spécifique de la langue à laquelle ils ont été exposés [Kuhl et al., 1992]. L'apprentissage du répertoire phonétique d'une langue se traduit en fait par une perte partielle : progressivement, le bébé sélectionne les contrastes phonétiques pertinents pour sa langue et oublie les autres. L'exemple de la phonologie nous donne une idée de la manière dont des différences fortes entre locuteurs de langues différentes peuvent émerger : par sélection d'informations pertinentes à l'apprentissage de la langue.

1.2.2 Concepts et catégories linguistiques

Certains concepts, non perceptibles (des notions scientifiques comme les quarks, les microbes par exemple), ne peuvent être acquis sans utiliser la langue comme vecteur. Cependant il existe des concepts que l'enfant semble maîtriser sans nécessiter d'apprentissage spécifique. Le mécanisme de différenciation par sélection que nous avons identifié au niveau des contrastes phonétiques pourrait-il s'appliquer au-delà des propriétés phonologiques des langues, à leurs propriétés sémantiques? Nous avons parlé de catégories phonétiques "universelles", de la même façon existe-t-il des concepts universels? Si oui, peut-on mettre en évidence un mécanisme de sélection tel que celui que nous avons évoqué ci-dessus? A quel niveau se situent les différences entre les locuteurs de langues différentes : est-ce au niveau de leurs représentations perceptives, ou de leurs représentations conceptuelles?

A l'inverse, se pourrait-il que des concepts radicalement nouveaux, transcendant toutes les catégories conceptuelles dont les enfants disposent avant d'apprendre à parler, soient créés au contact avec la langue (en-dehors de la situation mentionnée ci-dessus où un nouveau concept est enseigné au moyen de la langue)? Peut-on proposer un mécanisme pour rendre compte du développement d'un concept ab nihilo?

Existence de concepts universels

Hespos et Spelke ont présenté en 2004 des données qui attestent de l'existence de concepts universels [Hespos and Spelke, 2004]. Elles ont étudié un contraste linguistique entre les langues anglaise et coréenne : à la différence de l'anglais, le coréen emploie des mots différents pour désigner un contact étroit (une bague sur un doigt, un stylo dans son étui) ou un contact large (un collier autour d'un cou, un stylo dans une grande boîte)⁵. Les enfants coréens n'éprouvent aucune difficulté à appliquer cette distinction dès qu'ils commencent à parler. Hespos et Spelke ont montré que les bébés de 5 mois, ignorants du sens des mots de leur langue, sont sensibles au contraste entre contacts étroits et larges : une fois qu'ils ont été habitués à

⁵En français, ce contraste n'apparaît pas au niveau des verbes, comme en coréen, mais on le retrouve dans la nuance entre boîte et étui : l'étui est étroit, alors que la boîte ne l'est pas forcément.

regarder un expérimentateur manipuler deux objets en contact étroit, ils montrent un regain d'intérêt à voir deux objets en contact large, et vice-versa. Elles ont également demandé à des adultes anglophones de juger de la similarité entre ces mêmes stimuli : contrairement aux bébés, ces adultes ne prennent pas en compte les différences entre les types de contact dans leur jugement au premier abord. Ces données révèlent avant tout l'existence de catégories universelles, que le lexique des langues peut ou non refléter. Une partie, au moins, des distinctions apparentes dans la langue tirent donc leur origine de catégories conceptuelles présentes chez le bébé; mais il se pourrait encore que d'autres distinctions de sens soient générées par l'usage de la langue, en accord avec la théorie du relativisme linguistique.

A la différence des contrastes phonétiques, les adultes ont toujours accès aux contrastes conceptuels que leur langue ne souligne pas, aussi la sélection des contrastes conceptuels pertinents s'opère-t-elle à un autre niveau que pour les contrastes phonétiques. Après réflexion, les anglophones remarquent la différence entre contact étroit et large : questionnés sur les stimuli à la fin de l'expérience, beaucoup d'entre eux ont signalé la présence de ces deux types d'événements. Au contraire, il est très difficile pour un adulte d'apprendre un contraste phonétique qui ne fait pas partie de sa langue [Golestani et al., 2002], car le contact avec la langue modifie les représentations perceptives de ces sons. Au niveau conceptuel, l'effet de la langue est d'orienter l'attention vers certains aspects de l'environnement plutôt que d'autres, c'est un effet moins profond que celui des contrastes phonétiques.

Dans le domaine des couleurs, on trouve également des indices de l'existence de catégories universelles. Dans un travail d'anthologie, Berlin et Kay [Berlin and Kay, 1969] ont répertorié le vocabulaire des noms de couleurs dans près d'une centaine de langues, et noté que, sous la diversité apparente des lexiques de couleurs, on trouve des régularités remarquables : les catégories de couleurs possibles seraient en nombre limité, et la constitution du vocabulaire de couleurs, en accord avec ces catégories non-linguistiques, obéirait à un ensemble de contraintes sévères. En particulier, les "meilleurs exemplaires" de chaque couleur, prototypes qui sont censés correspondre au mieux aux mots, s'agrégent autour des mêmes teintes dans toutes les langues, révélant le découpage de l'espace des couleurs en une dizaine de catégories probablement universelles. En s'intéressant à d'autres aspects des noms de couleurs, des travaux récents ont cependant remis en cause le fait que les noms de couleurs ne soient que le reflet de catégories universelles : la définition des catégories linguistiques a également un aspect arbitraire.

Existence de catégories linguistiques arbitraires

Alors que Berlin et Kay ont examiné le meilleur exemplaire de chaque catégorie linguistique de couleur, l'équipe de Debi Roberson [Davidoff et al., 1999, Roberson et al., 2004] s'intéresse à la position des frontières entre catégories linguistiques, avec l'idée que la définition de ces frontières relève d'une convention totalement arbitraire. Ainsi, ils ont étudié comment des adultes réussissent à apprendre à classifier des couleurs suivant une frontière qui n'apparaît pas dans leur langue. La population qu'ils étudient, le peuple des Berinmo, est originaire de Papouasie Nouvelle-Guinée. Leur langue possède cinq termes de couleur basiques, en particulier deux termes, wor et nol, séparés par une frontière inexistante en anglais (entre des verts plutôt jaunes et

des verts plutôt bleus). A l'inverse, le lexique des Berinmo ne distingue pas le vert et le bleu (ces deux termes anglais sont traduits invariablement par nol). Les Berinmo ont été entraînés à classifier des couleurs suivant les deux frontières précédentes, toutes deux issues de classifications existant dans un langage naturel, ainsi que suivant une frontière arbitraire entre deux types de verts créée de toutes pièces par les auteurs. Ils n'éprouvent pas plus de difficulté à apprendre la frontière entre les deux types de vert que la frontière naturelle entre le bleu et le vert, alors qu'ils sont logiquement avantagés pour apprendre la classification issue de la frontière entre wor et nol. Ainsi les frontières entre les catégories linguistiques ne semblent pas refléter une classification universelle préverbale.

Dans un deuxième travail [Roberson et al., 2004], Roberson et al étudient le comportement d'enfants anglais et Himba (une tribu nomade africaine), âgés de 3 à 4 ans. A 3 ans, tous ces enfants ne savent pas appliquer les termes de couleurs, et les deux populations se comportent de la même façon face à un test d'identification de teintes, dans lequel ils doivent reconnaître une couleur cible après un délai de 30 secondes. Par contre, au fur et à mesure que ces enfants grandissent et acquièrent le lexique des couleurs, leurs erreurs se rarifient, et se mettent à suivre les propriétés spécifiques de chaque langue : les confusions ont lieu à l'intérieur des catégories linguistiques. Ainsi, une cible orangée, dont la teinte est située à mi-distance entre le prototype pour orange en anglais, et le prototype de Mehi (sorte de rouge) en Himba, se trouve plus souvent confondue avec l'exemplaire orange par les enfants anglais, et avec l'exemplaire rouge par les enfants Himba. Vers l'âge de 4 ans, la performance des enfants dans cette tâche d'identification (qui fait certainement intervenir la mémoire de travail verbale) est ainsi de plus en plus influencée par la langue qu'ils parlent. La question de savoir si ce sont les représentations perceptives de ces enfants qui sont transformées reste ouverte : comme le délai entre la présentation de la cible et des échantillons-réponse est assez long, les enfants utilisent probablement un encodage verbal de la teinte à mémoriser, de fait sensible à la différence entre les langues, mais restent certainement capables de percevoir la différence entre les teintes.

Exemples de mécanismes impliquant le langage

Les données précédentes sur les couleurs traduisent l'apparition d'un effet de la langue, mais sans expliquer comment le continuum perceptif des couleurs se cristallise peu à peu en catégories autour des termes linguistiques. Le mécanisme de redirection de l'attention vers des catégories pertinentes pour le langage dont nous avons parlé ci-dessus expliquait comment l'enfant sélectionne progressivement parmi des contrastes préverbaux : ce mécanisme ne permet pas d'expliquer que de nouveaux concepts soient créés. Dans une revue récente, Majid et al [Majid et al., 2004] décrivent plusieurs mécanismes qui pourraient rendre compte de l'acquisition de nouveaux concepts transcendant les représentations non-verbales. Nous retenons et illustrons ci-dessous deux de mécanismes décrits par Majid et al, et y ajoutons un troisième, selon lequel le langage permet de relier des catégories issus de différents modules cognitifs.

Recodage Sous l'effet de l'apprentissage de nouveaux mots, les catégories conceptuelles sont réorganisées différemment. Par exemple, lorsqu'un individu acquiert de l'expertise dans un domaine, il utilise des concepts

plus construits, plus aisés à manipuler, à plus fort pouvoir prédictif, regroupant plusieurs catégories de l'individu naïf. Là où un joueur d'échec novice raisonne sur des coups simples (avancer une pièce plutôt qu'une autre), un expert considère des alternatives entre plusieurs stratégies, constituées de plusieurs coups chacune. Ces stratégies sont repertoriées et un nom est attribué à chacune. En mathématiques, on procède souvent au regroupement de plusieurs concepts simples, analogues, sous un seul concept plus abstrait : ainsi la notion de groupe peut s'appliquer à des objets aussi variés que des entiers, des matrices, un ensemble de fonctions. Le cas des noms de couleurs, que nous avons exposé ci-dessus, illustre sous une autre forme le processus de recodage : ici ce ne sont pas plusieurs catégories simples qui sont regroupées en une catégorie plus complexe, mais les percepts se regroupent pour former des catégories linguistiques aux limites partiellement arbitraires.

Découverte de correspondances En apprenant le lexique, l'enfant remarque que des concepts différents sont regroupés sous le même mot, et ce phénomène le pousse à comparer différentes situations, et à extraire de nouvelles régularités. Dans ce mécanisme, le langage attire l'attention sur la nécessité de comparer plusieurs situations entre elles. Il permet ainsi d'apprendre des relations de haut niveau entre différents concepts, ces relations transcendent les concepts préexistant.

La théorie du bootstrapping de Susan Carey s'apparente à ce type de mécanisme [Carey, 2001]. Cette théorie explique comment les enfants, dotés initialement de systèmes non-verbaux de représentations des quantités qui ne présentent pas toutes les propriétés des entiers naturels, parviennent à comprendre les numéraux et le concept de nombre entier. En confrontant leurs représentations des petites quantités avec les premiers mots de la liste des numéraux (un, deux, trois ...), les enfants comprendraient le principe selon lequel cette liste est construite, et généraliseraient ce principe à l'ensemble des numéraux de la liste : ainsi ils comprendraient que chacun correspond à une quantité, que chaque quantité est obtenue à partir de la précédente en ajoutant 1. Il s'agit d'une mise en correspondance d'un niveau d'abstraction supérieur à celui que décrivent Majid et al : ici ce n'est pas parce que les numérosités ont le même nom que l'enfant analyse les relations entre numérosités voisines, c'est parce que tous les noms des numérosités appartiennent à un seul objet linguistique : la liste ordonnée des noms de nombres. A cette étape, selon Carey, les enfants développeraient le concept du nombre exact, selon lequel chaque numérosité peut être définie à l'unité près. La théorie du bootstrapping permet donc d'expliquer comment des concepts peuvent être développés à partir du langage, sur la base de représentations primitives qu'ils transcendent; néanmoins la présence de telles représentations supportant partiellement les propriétés du concept à acquérir est nécessaire.

Interface entre différentes représentations non-verbales Avec les propriétés combinatoires du langage, il est possible d'exprimer des relations complexes entre des informations issues de plusieurs systèmes cognitifs: le résultat forme une proposition qui transcende toutes les catégories non-verbales. Dans une série d'expériences remarquables, Hermer-Vazquez et Spelke montrent comment le langage peut servir à lier entre elles des informations non-verbales issues de différents modules cognitifs. Elles utilisent une tâche développée

chez le rat pour étudier la prise en compte d'indices géométriques et non-géométriques dans la navigation : les sujets sont placés dans un pièce rectangulaire, et observent l'expérimentateur cacher un objet dans un des coins de la pièce. Les sujets sont ensuite désorientés, puis on observe où ils vont chercher l'objet. Si aucun autre indice ne leur est donné, ils vont chercher indifféremment dans l'un des deux coins compatible avec la disposition géométrique de la pièce. Dans une deuxième condition, un mur de la pièce est colorié en bleu, de sorte qu'en prenant en compte à la fois les indices géométriques et la couleur du mur, il n'y a plus qu'une seule position plausible pour l'objet. Dans cette condition cependant, les rats continuent à ne se fier qu'aux indices géométriques : ils cherchent dans les deux coins géométriquement plausibles et ignorent l'indice de couleur. Alors que des humains adultes savent résoudre cette tâche à la perfection, Hermer-Vazquez et Spelke découvrent que les enfants âgés de 2 ans se comportent comme les rats : dès lors qu'ils ont été désorientés, ils ignorent totalement l'indice de couleur [Hermer and Spelke, 1996]. De plus, si on soumet des adultes à cette tâche, en leur demandant de répéter continuellement le contenu d'une bande sonore, ce qui a pour effet de bloquer l'accès à leurs ressources verbales, ceux-ci se mettent également à ignorer les indices colorés après avoir été désorientés [Hermer-Vazquez et al., 1999]. Ces expériences soulignent le rôle du langage pour combiner des informations issues de systèmes cognitifs différents, et mettre en relations des propriétés de l'environnement de différente nature (comme dans "à gauche du mur bleu" par exemple).

Suivant ce raisonnement, le langage pourrait s'avérer important dans le champ de la cognition numérique pour lier entre elles les différents types de représentations non-verbales pour les nombres. Les bébés naissent avec deux systèmes pour représenter les numérosités, dont aucun ne correspond pleinement aux entiers naturels : le premier est un système de représentations approximatives, qui s'étend vers les grandes numérosités mais confond des numérosités proches comme 15 et 16; le deuxième est un système restreint aux petits numérosités qui permet de se représenter exactement 1, 2, et 3. A un an, les bébés éprouvent des difficultés à relier ces deux types de représentations : ainsi, alors qu'ils peuvent comparer 2 avec 3, et 4 avec 8, ils ne sont pas capables de comparer 2 avec 4 [Xu, 2003]. L'apprentissage des numéraux dans le langage serait-il nécessaire pour relier ces deux types de représentations ? En cela, comme dans la théorie du bootstrapping, le langage permettrait de transcender les représentations non-verbales originelles.

1.2.3 Les "effets de bord" du langage

Du fait même qu'il possède le langage, l'être humain est susceptible de développer un certain nombre de ressources cognitives inaccessibles aux animaux. Sans le langage, beaucoup de stratégies sont impraticables : c'est le cas de toutes les stratégies impliquant la mémoire de travail verbale, et en particulier dans le champ de la cognition numérique, du comptage, du calcul mental. Mais au-delà de ces stratégies qui ne pourraient être que des effets de surface, il se peut que le langage permette une refonte bien plus profonde du système conceptuel. Le langage est une faculté composite, qui repose à la fois sur des systèmes cognitifs propres à l'homme, et d'autres systèmes que nous partageons avec les animaux. On peut se demander quels sont les traits du langage qui sont propres à l'homme [Hauser et al., 2002, Pinker and Jackendoff, 2005]; en particulier, la faculté de construire des récursions semble ne pas être partagée par les animaux. Une récursion est

une procédure qui s'appelle elle-même, ou une structure formée à partir d'une structure du même type : dans le langage, certaines phrases fournissent des exemples de structures récursives, comme celles qui contiennent des subordonnées enchassées ([le disque [que Joachim [qui est mon voisin] m'a donné]]). En mathématiques, certaines fonctions sont définies de manière récursive : c'est le cas par exemple de certaines suites, où le terme u_n est définie à partir du terme précédent u_{n-1} . Parmi les structures récursives, se trouve une classe de structures qui sont plus simples que les autres : ce sont celles que l'on obtient par itération. Itérer une procédure consiste à l'appliquer plusieurs fois successivement ; contrairement à la plupart des structures récursives, il n'est pas nécessaire de garder en mémoire la liste des appels à la procédure pour décoder la structure. En effet, lorsqu'on interprète une phrase avec des subordonnées enchassées, il faut interrompre le traitement de la subordonnée principale (que Joachim m'a donné) pour traiter la subordonnée secondaire (qui est mon voisin) ; en revanche dans une structure obtenue par itération simple, l'appel suivant à la procédure n'a lieu qu'une fois que le traitement du premier appel est terminé (la couleur de la voiture de Bénédicte). Les entiers naturels sont un exemple de structure obtenue par itération : on peut parcourir tous les nombres en ajoutant successivement une unité.

Alors que les enfants viennent à comprendre la structure itérative des entiers vers l'âge de trois ans, les chimpanzés ne semblent jamais devoir la découvrir. Durant leur troisième année, les enfants apprennent successivement à reconnaître les numérosités 1, 2, puis 3; puis au moment où ils comprennent la numérosité 4, ils découvrent la structure de la liste des entiers, et deviennent de fait capables de reconnaître toutes les numérosités. Chez les chimpanzés, au contraire, cette découverte n'a jamais lieu : un chimpanzé peut apprendre à utiliser les chiffres arabes jusqu'à 9, mais à chaque fois l'apprentissage d'un nouveau chiffre demande un nombre considérable d'essais [Matsuzawa, 1985], sans que le chimpanzé ne semble tirer bénéfice de ses apprentissages antérieurs. La faculté de manipuler des structures récursives ferait partie des prérequis uniquement humains du langage, puisque les chimpanzés ne semblent pas capables de faire des itérations. Cette faculté de récursion, que l'on voit à l'oeuvre dans l'interprétation des structures syntaxiques, pourrait être sollicitée pour des activités cognitives non-verbales : la manipulation de l'ensemble des entiers naturels serait un exemple d'opération mentale rendue possible par la possession de la faculté de récursion.

1.3 Organisation du manuscrit

En résumé, nos travaux abordent deux questions : comment caractériser nos représentations de numérosité, dont on peut penser qu'elles sont à l'origine de nos intuitions numériques? Que modifie le langage dans la cognition numérique?

Tout un ensemble de données convergent vers l'idée que l'être humain, à l'instar d'un ensemble varié d'espèces animales, est doté d'un système qui lui permet de représenter la numérosité d'un ensemble. Le chapitre 2 expose successivement l'état des recherches concernant les animaux, les bébés, et les adultes : chez ces trois populations on identifie les mêmes marqueurs comportementaux (loi de Weber, règle du ratio, loi de la variabilité scalaire), révélateurs d'un système représentant la numérosité de manière analogique.

L'idée d'une ligne numérique interne a été proposée pour traduire la structure de ces représentations, et capture par ailleurs tout un ensemble d'effets où les nombres interagissent avec l'espace.

Dans le **chapitre 3**, nous reprenons l'idée de la ligne numérique pour formuler un modèle mathématique des représentations analogiques de numérosité. Trois versions du modèle sont développées, qui se distinguent par l'échelle appliquée à la ligne numérique : celle-ci est soit linéaire (toutes les numérosités sont régulièrement espacées) soit compressive, et nous envisageons deux modèles de ligne compressive : une forme logarithmique ou une forme de fonction puissance. Nous démontrons que ces trois hypothèses sont compatibles avec la loi de Weber, la loi du ratio et la loi de la variabilité scalaire. Le **chapitre 4** confronte le modèle avec un ensemble de données expérimentales acquises chez des adultes occidentaux : tâches de comparaison, d'addition, de soustraction, d'identification de numérosité. Enfin, en étudiant la tâche d'estimation, nous avons pu trouver des critères expérimentaux pour nous prononcer en faveur d'une ligne compressive.

Les chapitres 5 et 6 introduisent au deuxième thème de nos recherches, où nous examinons si les bébés de trois mois sont sensibles à la numérosité. Le chapitre 5 discute des corrélats cérébraux de la représentation analogique de la numérosité : celles-ci ont été localisées dans une région de la partie horizontale du sillon intrapariétal. Au chapitre 6, nous abordons un débat actuel sur la représentation des petits nombres : il semble que les ensembles de petite numérosité engagent un système de pointeurs attentionnels (object files), qui perturbe l'accès aux informations de numérosité. A l'aide de la technique des potentiels évoqués (chapitre 7), nous montrons que les bébés encodent la numérosité des ensembles, dans un format indépendant de la taille des nombres et de la modalité de présentation des stimuli.

Enfin, nous abordons la question du rôle du langage dans la cognition numérique. En exposant les données de la littérature, le **chapitre 8** introduit la dichotomie entre arithmétique exacte et approximative : les tâches d'arithmétique approximative pourraient être résolues en faisant appel aux représentations analogiques de numérosité, par nature approximative; par contre pour résoudre des tâches d'arithmétique exacte il faudrait faire appel au langage. Ce constat soulève la question du rôle du langage dans le développement des concepts numériques : peut-on avoir un concept de nombre exact sans le langage? Nos recherches avec les Mundurucús, qui font l'objet du **chapitre 9**, montrent que ceux-ci témoignent des mêmes compétences pour l'arithmétique approximative que les occidentaux, bien que leur lexique numérique soit très restreint. Par ailleurs, ils possèdent un concept de nombre exact, alors que dans leur lexique les numéraux ont un sens approximatif.

En guise de conclusion, le **chapitre 10** retrace le développement de la cognition numérique tel que nos résultats permettent de l'envisager. Nous envisagerons les perspectives ouvertes par ce travail. Enfin, nous rapprocherons les représentations numériques, telles que nous les avons décrites, des objets mathématiques que sont les nombres entiers et les nombres réels, et dont nos représentations non-verbales de numérosité ont certainement inspiré la construction.

Première partie

Étude des représentations analogiques, non-verbales de la numérosité

Chapitre 2

Représentations numériques non-verbales : résultats expérimentaux

2.1 Cognition numérique chez l'animal

2.1.1 Introduction

D'où viennent les capacités numériques de l'être humain?

Cette question en comporte en réalité deux distinctes. Il s'agit de comprendre en premier lieu comment un individu de l'espèce humaine est capable de développer les capacités numériques dont nous faisons tous preuve. Peut-on trouver chez le nourrisson la trace de quelque savoir originel sur la base duquel des apprentissages ultérieurs, plus complexes, se grefferont? Parallèlement à cette question, nous pouvons penser nos origines en termes évolutifs. L'homme appartient au règne animal, et si nous avons développé un système puissant de manipulation des quantités, il y a fort à croire que nos voisins dans la chaîne évolutive sont dotés, au moins en germe, du même système.

Bien sûr les choses ne sont pas si simples. Les espèces présentes aujourd'hui à la surface du globe gardent la trace du chemin que l'évolution a suivi au cours de millénaires; mais aucune d'entre elles n'est à proprement parler notre ancêtre. Des milliers de différences distinguent notre génôme de celui de nos plus proches cousins, et ces différences peuvent avoir plusieurs origines: mutations ponctuelles, délétion de tout ou partie d'un gène, d'un chromosome, adjonction d'une nouvelle séquence au sein d'un gène, création d'un nouveau gène, d'un nouveau chromosome... Autant de transformations qui ont pu intervenir entre notre ancêtre et nous, entre les autres primates et cet ancêtre. Il reste cependant une partie de notre patrimoine qui, sous l'effet d'une pression sélective, ou de par sa nécessité pour la viabilité de l'individu, ou simplement par hasard, est restée identique au cours des années. Des séquences se sont ainsi retrouvées intactes chez nous, chez le singe et peut-on penser, conformes à ce qu'elles étaient chez notre ancêtre commun. Modulées par l'interaction d'autres gênes différenciés entre toutes ces espèces, elles vont coordonner le développement de capacités cognitives similaires entre espèces. On parle alors d'homologie.

En observant directement la cognition, éloignée des mécanimes biochimiques de plusieurs échelles de

description, nous sommes inévitablement aveugles aux mécanismes biologiques. Or il se peut que le même comportement chez deux espèces différentes soit implémenté par deux mécanismes fondamentalement différents. En particulier si une fonction est extrêmement utile, il n'est pas exclus que deux arbres généalogiques convergent indépendemment vers l'implémentation de cette fonction, par des moyens distincts : ce phénomène est appelé homoplasie.

Si on ne s'intéresse aux animaux que dans l'espoir d'apprendre quelque chose sur la cognition humaine, on cherchera avant tout à découvrir des homologies. Mais comment distinguer homologies et homoplasies, sans avoir accès à l'ensemble de la chaîne causale du gène au comportement? Plus l'espèce considérée est proche de l'Homme par son patrimoine génétique, plus il semblera plausible de conclure à une homologie, sans pour autant que cela ne constitue une preuve. On examinera également la généralisation d'un comportement parmi le règne animal : si de nombreuses espèces présentent le même comportement, il sera plus parcimonieux de penser que toutes ces espèces ont hérité cette faculté d'un ancêtre commun, l'hypothèse alternative, plus coûteuse, étant que ces espèces auraient toutes, séparément, développé la même faculté, et dû "inventer" un mécanisme adapté. Enfin, il devient possible d'étudier directement par l'électrophysiologie et l'imagerie les bases cérébrales des fonctions cognitives chez l'homme et l'animal. Ces données nous ouvrent la possibilité de tester la validité de l'hypothèse de l'homologie plus en amont dans la chaîne causale.

Dans la suite de ce chapitre, nous passons en revue un florilège de résultats sur le traitement des numérosités par les animaux. Si il n'est pas possible de retranscrire ici l'intégralité des études sur ce sujet, nous avons pris soin en sélectionnant nos références de rendre compte de la variété des tâches numériques et des espèces qui ont été étudiées. Nous nous intéresserons également aux résultats d'imagerie cérébrale, qui pourront être considérés en regard des données humaines.

2.1.2 Premiers indices: tâches de production

La littérature sur la cognition numérique des animaux rengorge d'anecdotes croustillantes sur des bêtes savantes, capable de résoudre des opérations compliquées. Des cormorants de Chine, pêchent pour les hommes et sont autorisés systématiquement à manger le huitième poisson [Egremont and Rothschild, 1979]; un corbeau a atteint la célébrité posthume pour avoir compté et évité jusqu'à 4 chasseurs postés pour l'abattre [Dehaene, 1997]; au siècle dernier un chercheur allemand éduqua son cheval Hans à lire, compter, additionner, soustraire; et dans les cirques les chiens connaissent sur le bout des pattes leurs tables de multiplication. Mais, lorsqu'il s'avéra que le cheval Hans n'était capable d'effectuer une opération que si son maître en connaissait lui-même la réponse, le doute s'installa sur ces observations, et la nécessité d'inventer des méthodes d'expérimentation rigoureuses s'imposa.

Les années 50 ont vu la parution des premiers travaux abordant la sensibilité des animaux à la numérosité de manière rigoureuse, par Koehler [Koehler, 1951], puis Mechner [Mechner, 1958]. Dans le paradigme utilisé par Mechner, un rat est introduit dans une cage où se trouvent deux leviers A et B. Pour obtenir de la nourriture, il lui faut d'abord appuyer un certain nombre de fois (n) sur le levier A, puis appuyer sur B. Si le rat actionne B avant que le nombre requis n soit atteint, il endure une pénalité. En faisant varier n,

Mechner démontre que les rats sont capables d'adapter leur comportement : ainsi le nombre moyen d'appuis effectués est-il fortement corrélé avec le nombre minimum requis n. Une dizaine d'années plus tard, Platt et Johnson [Platt and Johnson, 1971], obtiennent le même résultat pour des nombres n compris entre 4 et 24, voire 32 pour certains animaux, et montrent également que les rats adaptent leur comportement à la sévérité de la pénalité accordée. Ainsi, dans toutes leurs conditions, les rats appuient toujours en moyenne un peu plus que le minimum requis, et sur-estiment d'autant plus que la pénalité est sévère. Au delà de ces variations dans le nombre moyen d'appuis, Platt et Johnson obtiennent la même distribution de réponses que Mechner, caractérisée par la propriété de variabilité scalaire: l'écart type des réponses dans chaque condition est proportionnel à la réponse moyenne pour cette condition (voir figure 2.1). Pour en donner une formulation plus simple : le coefficient de variation ($\frac{\text{écart type}}{\text{réponse moyenne}}$) est constant quelle que soit la valeur de n, et ceci même pour des petits nombres comme 4. En réanalysant ces données, Gallistel et Gelman [Gallistel and Gelman, 2000] estiment la valeur du coefficient de variation à 0.5.

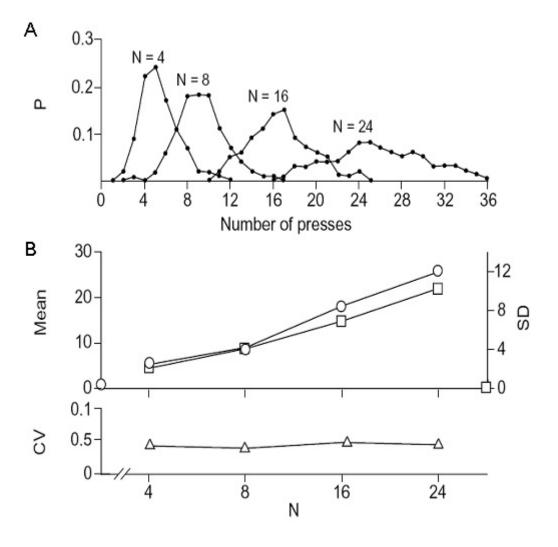


FIG. 2.1 – A. Distribution du nombre d'appuis produits sur le levier, chez des rats, pour différentes valeurs cibles (N=4, 8, 16 ou 24). B. Moyenne (axe de gauche, cercles) et écart-type (axe de droite, carrés) des distributions précédentes. Le graphique du bas donne le coefficient de variation (CV), qui correspond au quotient entre l'écart-type et la moyenne. Le coefficient de variation est constant, quelle que soit la valeur de la numérosité cible. Reproduit depuis [Gallistel and Gelman, 2000].

Cependant, les résultats précédents restent ambigus : comment être sûr que les rats répondent sur la base du nombre, et pas sur quelque autre paramètre, tel le temps passé à appuyer sur le levier, l'énergie totale dépensée, etc. Quelques années après la publication de sa première étude, Mechner [Mechner and Guevrekian, 1962] tente d'apporter un élément de réponse à cette question difficile. Dans cette variante, les rats sont placés dans plusieurs conditions de privation d'eau. Mechner observe que plus les rats sont assoiffés, plus ils adoptent un rythme soutenu dans leurs appuis sur le levier. Par conséquent, le délai entre le premier appui sur A et l'appui sur B est raccourci lorsque les rats sont très assoiffés. Parallèlement, dans une condition contrôle, d'autres rats devaient simplement attendre un délai fixe entre un premier appui sur A et un appui sur B. Dans cette condition, au contraire, la privation d'eau n'avait aucune influence sur les réponses. Mechner prouve ainsi qu'il est possible d'entraîner les rats à répondre selon deux schémas différents, mais l'expérience ne permet pas de conclure que les rats reconnaissent le nombre d'appuis dans leur réponse. Dans la mesure où chaque session consiste en un nombre élevé d'essais consécutifs (1 heure de test), il se peut tout simplement que les rats aient appris à répondre après un certain délai, réestimé à chaque session.

Dans la mesure où il était difficile de séparer le nombre d'autres facteurs confondus dans le cadre de ce paradigme, d'autres laboratoires ont créé ensuite de nouvelles expériences, basées cette fois sur la perception de la numérosité, ce qui leur permit de contrôler plus finement la présence de paramètres corrélés avec le nombre.

2.1.3 Discrimination de deux numérosités

Quelques exemples: stimuli visuels et auditifs

Les tests de discrimination de numérosité en perception ont beaucoup inspiré la communauté scientifique. On trouve une très large littérature impliquant des espèces extrêmement variées, dans les modalités visuelle, auditive, tactile, kinesthésique... Loin de prétendre ici donner un tableau exhaustif des recherches, nous nous attarderons sur les études qui ont fait date. Une emphase particulière sera mise sur les études tentant de mettre en évidence une généralisation entre différentes modalités. Ces études testent en effet si les performances numériques des animaux sont liées à une propriété abstraite de numérosité, ou seulement à quelque propriété perceptive dépendante de la modalité.

Dans la modalité auditive, Fernandes et Church [Fernandes and Church, 1982] présentent à des rats des séquences contenant 2 ou 4 sons, tout en contrôlant finement les propriétés temporelles des stimuli. L'animal est introduit dans une cage avec deux leviers, qui correspondent pour l'un à '2', pour l'autre à '4'. Lorsque le rat donne une réponse correcte, il reçoit de la nourriture et par ce biais peut apprendre l'association entre les stimuli et les leviers. Après avoir entraîné les rats avec des séquences sonores particulières, Fernandes et Church construisent plusieurs nouveaux stimuli pour chaque numérosité (2 et 4) où ils calculent systématiquement la durée de chaque son, de l'intervalle entre les sons, le rythme de la séquence, l'énergie sonore totale, en sorte que ces paramètres prennent les mêmes valeurs dans les deux conditions numériques. Si l'animal choisissait de répondre sur la base d'un de ces paramètres non numériques, il échouerait donc nécessairement

sur certains stimuli. Au contraire, toutes les séquences présentées ont été associées avec le bon levier.

Avec Meck, Church adopte une autre méthode pour étudier le même problème [Meck and Church, 1984]. Durant la phase d'entraînement, Meck et Church présentent exclusivement des stimuli où numérosité et durée sont parfaitement corrélés: la première séquence contient 2 sons et dure 2 secondes, la deuxième contient 8 sons et dure 8 secondes. Les rats apprennent alors à associer ces deux séquences avec deux leviers différents. Ensuite, lors de deux phases de test distinctes, de nouvelles séquences sont présentées, tandis que l'animal répond toujours suivant les mêmes critères. Dans l'une des sessions, la numérosité des séquences est constante, égale à 4 et la durée de ces séquences varie entre 2 et 8 secondes. Dans une autre session, à l'inverse, la durée des séquences est constante, de 4 secondes, et leur numérosité varie entre 2 et 8. Les résultats indiquent que les rats sont capables de généraliser les associations apprises durant l'entraînement autant sur la base de la durée que de la numérosité (voir figure 2.2 B). Par exemple, lors de la session où la numérosité est variable, les séquences contenant deux sons (et durant 4 secondes) sont jugées semblables à la séquence d'entraînement de 2 sons et 2 secondes. De la même façon, les séquences contenant 8 sons (et durant toujours 4 secondes) sont associées avec l'autre levier. Entre ces deux extrêmes, la proportion de réponses sur le premier levier varie continuement, avec un seuil d'indifférence situé à 4 sons. Le même profil de réponses est observé dans la condition temporelle. A priori, il n'est cependant pas possible de se prononcer sur la saillance respective de la durée et de la numérosité des stimuli pour l'animal.

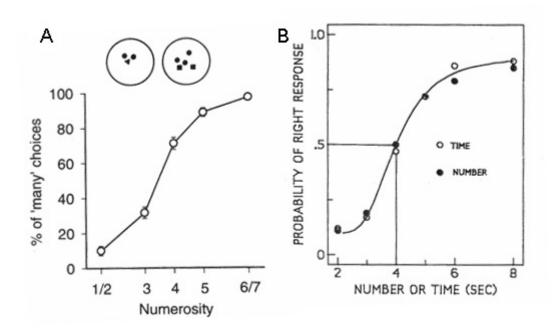


FIG. 2.2 – A. Des pigeons, préalablement entraînés à distinguer des stimuli visuels contenant peu (1,2) ou beaucoup (5,6) d'éléments, devaient généraliser cette classification à des stimuli contenant 1 à 6 éléments. Le graphique montre le pourcentage d'essais où ils ont choisi la réponse "grand". Reproduit depuis [Emmerton et al., 1997]. B. Réponse des rats pour classifier des stimuli variant en numérosité (symboles creux) ou en durée (symboles remplis). Ces rats ont été entraînés à associer une séquence de numérosité 4 et de durée 4 secondes avec le levier droit, alors que le levier gauche était associé avec une séquence de numérosité 2 et de durée 2 secondes. Reproduit depuis [Meck and Church, 1984].

D'autres laboratoires se sont intéressés à la modalité visuelle. Pour des stimuli en présentation séquentielle, on peut citer par exemple Davis et Bradford [Davis and Perusse, 1988, Davis and Bradford, 1986]. Dans cette étude, les rats sont placés dans une cage contenant 6 tunnels identiques répartis le long de la largeur de la cage, et sont entraînés à pénétrer dans un tunnel particulier pour récupérer de la nourriture. Dans cette tâche, les rats choisissent le bon tunnel, même lorsque la position absolue de celui-ci par rapport à la cage change radicalement. De plus, l'apprentissage est extrêmement robuste, puisque en testant de nouveau les animaux 12 mois plus tard, Davis et Bradford se sont aperçus que bon nombre d'entre eux choisissent encore le tunnel sur lequel ils ont été entraînés.

Toujours dans la modalité visuelle, Emmerton, Lohmann et Niemann ont étudié la discrimination de nuages de points par des pigeons [Emmerton et al., 1997]. Les stimuli sont présentés en mode simultané, sous forme de nuage de points, et durant l'entraînement les pigeons apprennent à distinguer deux classes de stimuli en appuyant sur deux touches. Ils doivent associer les stimuli contenant 1 ou 2 éléments à la première touche, ceux contenant 6 ou 7 éléments et à la deuxième touche. Durant la phase de test, d'autres nuages de 3, 4 ou 5 éléments sont également présentés, et les pigeons répondent en utilisant toujours les deux mêmes touches. Emmerton et al observent des courbes de réponses continues en fonction de la numérosité, semblables à celles observées par Meck et Church dans la modalité auditive [Meck and Church, 1984] (voir figure 2.2 A).

Un concept de nombre abstrait?

Toutes les expériences retranscrites ci-dessus explorent la capacité des animaux à distinguer deux quantités dans une modalité particulière. En fait, aucune d'entre elles ne nécessite de posséder un concept abstrait de numérosité. Dans tous les cas, l'animal a pu résoudre la tâche en extrayant une régularité propre à la modalité concernée. Même en multipliant les études de cette sorte, il restera impossible de décider si on est face à un réel concept de numérosité abstraite ou à plusieurs exemples au cours desquels à force d'entraînement les animaux sont parvenus à apprendre à extraire la quantité d'un type de stimulus particulier. Il est tout de même troublant de noter l'extrême similitude entre les courbes de réponse à la numérosité dans les différentes modalités (voir figure 2.2). Les expériences de Meck et Church d'une part, d'Emmerton et al d'autre part, reposent en effet sur des dessins expérimentaux proches bien que la première utilise des stimuli séquentiels et auditifs et la deuxième des stimuli visuels et simultanés. Si, conformément à ce que cette observation laisse suggérer, l'animal utilise un même concept abstrait de numérosité dans les deux cas, il doit pouvoir transférer une tâche apprise dans une modalité, avec un certain type de stimulus, à une autre modalité.

Les réponses apportées à cette question sont assez mitigées. Tout dépend du critère que l'on adopte pour déterminer si le transfert a eu lieu. Pastore [Pastore, 1961], par exemple, adopte en 1961 un critère extrêmement strict : selon lui si l'animal utilise un concept abstrait de numérosité, il devrait arriver au même niveau de performance dès les premiers essais après le changement de modalité. Pastore reporte un échec chez des canaris, entraînés à discriminer des ensembles d'objets présentés simultanément, et testés avec une

présentation séquentielle des stimuli. Dans ce cas, il fut nécessaire de réentrainer les canaris avant qu'ils n'arrivent à faire la tâche en séquentiel.

Plus laxistes dans leurs critères, Meck et Church concluent à l'existence d'un transfert entre modalités visuelles, auditives et tactiles. Dans leur première expérience, inspirée du protocole de Fernandes et Church [Fernandes and Church, 1982], ils entraînent des rats à distinguer des séquences de 2 et 4 sons, puis les testent en utilisant des stimuli visuels (séquence de flashes lumineux). Ils comparent alors deux groupes de rats : pour les premiers, le levier qui était associé avec 2 sons reste associé avec 2 flashes; pour les seconds, les rôles des deux leviers sont échangés. Dans ces conditions, Meck et Church observent une différence entre les deux groupes, qu'ils expliquent par un transfert de la discrimination apprise sur des stimuli auditifs à des stimuli visuels. Dans une autre expérience, ils mettent en évidence un transfert entre des stimuli auditifs et des stimuli tactiles : ainsi des stimuli contenant 4 sons alternant avec 4 chocs électriques sont-ils jugés semblables à des stimuli contenant 8 sons.

Cependant, lorsque Davis et Albert ont entraîné des rats à discriminer des stimuli constitués de trois sons successifs de stimuli de deux ou quatre sons, et ensuite exposé ces rats à des stimuli de deux, trois ou quatre flashes lumineux, ils n'ont trouvé aucun transfert de la capacité de discriminer des numérosités de la modalité visuelle vers la modalité auditive [Davis and Albert, 1987]. Ces résultats soulèvent la possibilité que les rats de Church et Meck aient simplement généralisé leur comportement sur la base de la quantité d'énergie contenue dans les stimuli : ainsi, les stimuli de 2 sons, qui totalisent moins d'énergie sonore que les stimuli de 4 sons, auraient été associés aux stimuli de 2 flashes, qui contiennent moins d'énergie lumineuse que les stimuli de 4 flashes.

Plus récemment, Jordan et al [Jordan et al., 2005] ont réussi à mettre en évidence un transfert entre les modalités visuelle auditive chez des singes (macaques). Ils présentent des vidéos avec les visages de deux ou trois congénères qui produisent un cri en même temps, et passent en lieu de bande sonore les cris mélangés de deux ou trois de ces congénères. En un seul essai, les singes montrent qu'ils préfèrent regarder le film qui montre autant de congénères qu'il y a de cris. Avec des stimuli écologiques, qui suscitent l'intérêt des singes, cette expérience démontre une capacité à détecter la correspondance entre des ensembles présentés dans des modalités différentes. Cependant, les cris qui ont été présentés correspondent réellement aux images des vidéos, aussi on ne peut exclure que les singes aient jugé du bon appariement des images avec la bande sonore en utilisant des indices physiologiques tels que les mouvements de bouche, sans qu'il n'ait été nécessaire d'encoder la numérosité des ensembles.

En résumé les résultats restent partagés, certaines expériences montrant que les animaux tranfèrent leurs capacités numériques d'une modalité à l'autre, d'autres constatant l'absence de transfert. Le paradigme utilisé récemment par Jordan et al semble cependant très prometteur, si l'on peut montrer d'une part que les sujets n'ont pas simplement jugé de l'adéquation entre les mouvements des singes sur les vidéos et les propriétés accoustiques des cris, et d'autre part qu'ils se comportent de la même façon avec des grandes numérosités.

Validité écologique des résultats précédents

De manière générale, les tâches exposées ci-dessus requièrent un entraînement considérable, sur des centaines d'essais, avant que l'animal ne soit capable de les résoudre. Est-ce à dire que la numérosité n'est pas une propriété que l'animal utilise dans son élément naturel? Cela serait en contradiction avec les arguments évolutifs, selon lesquels la représentation de la numérosité est un trait sélectionné, présent chez les animaux dans une forme plus ou moins rudimentaire. Dans les paragraphes précédents, nous avons déjà cité les récents résultats de Jordan et al et la tâche de navigation de Davis et Bradford, qui, certainement plus proche des problèmes écologiques, ne nécessitait pas énormément d'essais d'entraînement, et dont l'apprentissage survivait aux années.

Plusieurs recherches ont mis en évidence des comportements à l'état sauvage où la quantification semble intervenir. Par exemple, lorsque les animaux recherchent de la nourriture, ils se comportent de manière bayésienne pour décider de leur éventuel retour sur différents emplacements. Si un conflit éclate entre clans, les parties prennent en compte le nombre d'amis et d'ennemis en présence avant de s'engager. Par exemple, lorsqu'on fait entendre des rugissements à des lionnes, celles-ci se dirigent belliqueusement vers la direction du cri lorsqu'elles sont plus nombreuses que les ennemies entendues; mais elles évitent de s'en approcher dans le cas contraire [McComb et al., 1994a]. Le même phénomène, avec un dispositif expérimental semblable, a été démontré chez des chimpanzés [Wilson et al., 2001]. Toutes ces études montrent que dans de nombreux cas les animaux utilisent spontanément des informations quantitatives, mais ne permettent pas de connaître le degré d'abstraction des représentations numériques en question.

Depuis plusieurs années, l'équipe de Marc Hauser s'intéresse au problème de la validité écologique des résultats sur la numérosité, et entreprend de tester l'accessibilité des représentations numériques dans des situations bien contrôlées. Ainsi, récemment [Hauser et al., 2003], ils ont démontré chez des petits singes (cotton-top tamarins) la capacité à discriminer des stimuli sur la base du nombre de syllabes qu'ils comportent. Pour ce faire, ils ont utilisé une technique issue de la recherche sur les nouveaux-nés (voir paragraphe 2.2): la mesure de l'orientation vers la source sonore. Des singes sont placés dans une cage, et tournent le dos à un haut-parleur qui peut diffuser des stimuli. A chaque essai, on note simplement si le singe s'est orienté vers le haut-parleur ou pas. Après une période d'habituation où le singe entend des stimuli contenant tous le même nombre de syllabes, l'animal est confronté à deux types de stimuli test : certains contiennent le même nombre de syllabes que les stimuli de la phase d'habituation, d'autres contiennent un nombre différent de syllabes. Les stimuli de la phase d'habituation et de la phase de test ont été contrôlés en sorte de décorréler un certain nombre de paramètres non-pertinents (voix, durée, rythme...) de la numérosité. Dans cette étude, les singes, sans entraînement, se retournent plus souvent vers la source sonore lorsque le stimulus test n'a pas le même nombre de syllabes que les stimuli d'habituation : ils réussissent donc à discriminer des numérosités. Plus précisément, leur performances suivent la loi de proportionnalité: c'est le quotient entre les deux numérosités qui prédit si celles-ci sont discriminables ou pas. Ainsi, les singes différencient les numérosités 6 et 4, 12 et 8 (quotient = 1.5), mais confondent 5 et 4, 10 et 8 (quotient = 1.25).

2.1.4 Opérations arithmétiques sur les numérosités

Comparaison

Nous avons vu ci-dessus que les animaux sont capables de distinguer deux numérosités lorsque celles-ci sont suffisamment différentes; mais sont-ils capables d'effectuer des manipulations sur ces numérosités? Le concept de nombre entier se définit en effet en mathématique par un ensemble de propriétés : la notion de bon ordre qui stipule que l'on trouve toujours parmi deux entiers un plus petit et un plus grand ; la notion d'anneau qui définit un ensemble d'opérations réalisables sur les entiers (addition, soustraction, multiplication, et certaines divisions). Selon Gallistel et Gelman [Gallistel and Gelman, ress], il ne serait même pas correct de parler de cognition numérique si les représentations numériques en question ne peuvent pas être additionnées, soustraites, ou ordonnées.

Une chose est sûre : les singes sont capables d'ordonner deux quantités de nourriture. En préalable à leur étude sur l'addition d'ensembles, Rumbaugh, Savage-Rumbaugh et Hegel [Rumbaugh et al., 1987] réalisent une expérience préparatoire dans laquelle ils présentent à des chimpanzés deux assiettes contenant de 0 à 4 carrés de chocolat. Le chimpanzé est invité à choisir l'une des deux assiettes et d'en consommer le chocolat. Dans ces conditions, les singes choisissent l'assiette la plus remplie dans plus de 95% des cas. Des capacités similaires ont été démontrées chez la salamandre, résultat d'autant plus impressionnant que cet animal est extrêmement éloigné de l'homme dans la chaîne évolutive.

Il n'est cependant pas nécessaire de faire appel à des capacités numériques dans les deux cas précédents. La capacité de choisir de plus grandes quantités de nourriture possède un poids sélectif si fort, et intervient si souvent dans l'existence de l'individu qu'il n'est pas absurde que nombre d'espèces aient développé un module spécialisé pour y parvenir. Les résultats précédents ne reposeraient pas sur une capacité d'ordonner des numérosités, mais sur la capacité à calculer la quantité de matière présente et à maximiser la part que l'on s'attribue.

C'est en 1998 que Brannon et Terrace [Brannon and Terrace, 1998, Brannon and Terrace, 2000] publient leurs premiers résultats sur la notion d'ordre chez les macaques. Leurs sujets sont entraînés à pointer successivement vers des images contenant 1, 2, 3 et 4 objets. Afin de s'assurer qu'ils sont bien sensibles à la numérosité et non à quelque autre paramètre non-numérique, une grande variété de stimuli ont été utilisés, en égalisant différents paramètres non-numériques selon les conditions. Testés ensuite avec de nouvelles numérosités (entre 5 et 9), les singes généralisent la tâche dès les premiers essais; ils sont également capables d'ordonner deux images si l'une contient moins de 4 objets et l'autre plus. Ces résultats démontrent que les singes représentent la numérosité des stimuli et que ces représentations sont ordonnées.

Observation troublante : ces capacités dépendent en fait crucialement de la règle de tri utilisée. Si la tâche du singe consiste à ordonner les images dans un ordre descendant, il n'est plus capable de généraliser son savoir à de nouvelles numérosités. Plus frappant encore, Brannon et Terrace ont essayé d'enseigner à un singe de trier les images dans un ordre non-monotone (4-1-3-2), sans succès, alors que le même singe est parvenu par la suite à apprendre et généraliser le tri croissant. Les auteurs envisagent deux explications

plausibles à ce phénomène : soit le tri croissant est trop saillant pour être inhibé, soit la difficulté du tri non monotone vient de la nécessité d'identifier chaque nombre avant de répondre. En effet, pour trier les images dans l'ordre croissant, il n'est pas nécessaire de savoir que l'une contient 1 élément, l'autre 2, etc, il suffit de reconnaître que l'une contient moins d'éléments que toutes les autres, etc. Au contraire, pour trier les images dans l'ordre 4-1-3-2, il faut identifier de manière absolue le cardinal de chacune. Les deux hypothèses précédentes pourraient être séparées en utilisant des séquences de trois nombres : en effet dans ce cas il n'est plus nécessaire d'identifier chaque cardinal absolument, ils sont définis comme "le plus grand", "le plus petit", "le nombre qui est ni le plus grand ni le plus petit". Malheureusement les auteurs n'ont pas essayé de proposer ce test aux singes.

Si la difficulté des singes à utiliser un ordre aléatoire vient de la saillance de l'ordre croissant, alors les résultats sont un peu faibles pour parler réellement de "représentations ordonnées". Est-il en effet correct de qualifier de représentation un état mental qui ne peut aboutir qu'à un seul comportement (i.e. trier en ordre croissant)?

Addition

Les premiers tests d'addition par des chimpanzés ont été créés par Rumbaugh, Savage-Rumbaugh et Hegel [Rumbaugh et al., 1987]. Dans ce test, l'animal est face à un dispositif à quatre récipients. Ces récipients contiennent des chocolats (0 à 4) visibles par le singe. Les récipients forment deux groupes de deux, et le singe doit choisir entre ces deux groupes. Dans ces conditions, le singe choisit le groupe où la somme du nombre de carrés de chocolat dans les deux récipients est la plus grande. Les performances dépendent en fait de la distance entre le nombre total de carrés de chocolat dans les deux groupes de récipients : plus les deux sommes sont différentes, mieux le singe réussit la tâche.

Cette étude a le mérite d'explorer plusieurs conditions et de montrer la continuité des performances entre les petits et les grands nombres (le seul facteur influençant les performances est la distance entre les deux sommes). Cependant, comme les chocolats ne sont pas cachés au moment du choix, il se peut que le singe ait considéré directement chaque groupe de deux récipients comme un seul ensemble : dans ce cas il n'est plus besoin d'additionner. Par ailleurs, le nombre est ici corrélé à la quantité totale de nourriture, or nous avons vu plus haut que la capacité de se diriger vers les lieux où il y a la plus grande quantité de nourriture possède un poids sélectif tel qu'il n'est pas absurde que de nombreuses espèces utilisent pour ce faire des systèmes plus rudimentaires que le traitement de la numérosité.

Boysen et Berntson [Boysen and Bernston, 1989] ont par la suite donné une démonstration sans appel de la capacité d'additionner des chimpanzés. Ils travaillent avec un chimpanzé femelle nommée Sheba, qui a été entraînée à utiliser des chiffres arabes pour quantifier des ensembles d'objets. Boysen et Berntson cachent des oranges en plusieurs points de la pièce de test, en sorte que les oranges ne soient pas visibles toutes en même temps. Sheba doit faire le tour de la pièce et, en revenant, indiquer combien d'oranges elle a vu en montrant le chiffre correspondant. L'animal a réussi à résoudre cette tâche dès les premiers essais d'entraînement, indiquant par là que l'addition ne présente pas de difficulté supplémentaire par rapport

au simple dénombrement d'objets. Dans une deuxième version, Sheba ne trouve plus des oranges dans les cachettes, mais des chiffres arabes. Là encore, dès les premiers essais, elle parvient à donner la réponse à l'addition qui lui était posée. Limités ici par les connaissances de leur singe sur les chiffres arabes, Boysen et Bernston ne testent que des petits nombres, le résultat des additions étant au maximum égal à 4.

Non content de montrer que les singes ont spontanément accès à des représentations numériques, Hauser a montré ensuite avec son équipe [Flombaum et al., 2005] que ces sujets sont capables d'effectuer des opérations mentales sur ces représentations. La population de singes étudiée ici vit en semi-liberté sur une île isolée. Flonbaum et ses collègues repèrent des singes seuls et leur présentent un dispositif où deux ensembles de citrons sont ajoutés successivement sur un plateau. Pendant la manipulation, le contenu du plateau est caché par un écran. Cet écran se baisse ensuite pour révéler soit le résultat attendu, soit un autre résultat. Dans cette tâche, ces singes, sans entraînement, regardent plus longtemps la scène si le résultat montré diffère suffisamment du résultat attendu. Ainsi 8 et 4 sont différenciés par les singes, mais ceux-ci réagissent indifféremment à 4 et 6. Encore une fois la distance entre les numérosités à comparer influence crucialement la performance des singes.

Soustraction

La soustraction de numérosité a été testée par Brannon et al [Brannon et al., 2001] sur des pigeons. Dans ce paradigme, des pigeons doivent appuyer sur une touche pour générer des flashes lumineux. Lorsqu'un certain nombre de flashes a été généré (e.g. 8), ils obtiennent une récompense sous forme de nourriture. L'apparition des flashes est contrôlée pour décorrèler le nombre de flashes obtenus et le temps passé à picorer la touche. Dans certains essais, une deuxième touche s'allume avant que le pigeon n'ait eu le temps d'obtenir ses 8 flashes. Dans ce cas, l'animal a le choix : soit il continue d'appuyer sur la même touche et doit générer autant de flashes qu'il en manque pour parvenir à 8; soit il choisit la deuxième touche et doit obtenir un nombre fixe de flashes (4). Selon le nombre de flashes (n) déjà obtenus au moment où s'allume la deuxième touche, le pigeon a intérêt soit à rester (8-n < 4) soit à changer de touche (8-n > 4). Lorsque n augmente, les auteurs observent que les pigeons ont de moins en moins tendance à choisir la deuxième touche. Par ailleurs, lorsque les nombres étalon sont changés, par exemple le nombre de flashes requis devient 12 sur la première touche et 6 sur la deuxième, les pigeons adaptent très vite leur comportement en déplaçant leur point d'indifférence vers 6.

Toutefois, ces expériences ont été critiquées par Dehaene [Dehaene, 2001] qui met en doute que les pigeons aient réellement effectué des soustractions entre des numérosités. Selon lui, il serait plus parcimonieux de supposer que les pigeons ont associé les touches avec une quantité d'effort à fournir pour obtenir la récompense, ces associations étant modulées par le nombre de flashes déjà générés. Ainsi, si au moment où on offre à l'animal la possibilité de choisir entre les deux touches, le nombre de flashes déjà générés est faible, la première touche est associée avec un grand effort à fournir. Si, au contraire, beaucoup de flashes ont déjà été générés, l'effort associé à cette touche est assez faible.

2.1.5 Données électrophysiologiques

Très peu d'études à ce jour ont essayé de rechercher les bases cérébrales de la cognition numérique chez l'animal. Une première tentative a été réalisée dans les années 70. Chez les chats endormi, Thompson et ses collègues [Thompson et al., 1970] ont trouvé des cellules dans le cortex pariétal qui répondent sélectivement à une numérosité particulière. Les cellules présentent la même préférence dans différentes conditions de stimulation : stimuli visuels, auditifs, rythme de stimulation variable. Cependant, peu de cellules présentent de telles caractéristiques : sur 500 cellules testées, seulement 5 ont été retenues.

Pendant longtemps, ces données sont restées sans réplication; quelque vingt ans plus tard, une équipe japonaise [Sawamura et al., 2002] a retrouvé des cellules sensibles à la numérosité dans le cortex pariétal du singe éveillé. Tandis que le singe effectuait plusieurs fois de suite le même mouvement de bras, des cellules du lobule pariétal supérieur déchargeaient sélectivement au moment où le singe effectuait par exemple le 3e mouvement. Sawamura et ses collègues trouvent beaucoup plus de cellules sensibles au nombre que Thompson (30% des cellules enregistrées), sûrement grâce à une plus grande précision dans le site d'enregistrement. Il ne s'agit pas là de cellules représentant la numérosité de façon abstraite, puisque leur taux de décharge dépend aussi du type de mouvement effectué. Plus vraisemblablement, les cellules interrogées participent à la planification du mouvement, en particulier permettent de décider s'il faut ou non continuer la séquence motrice.

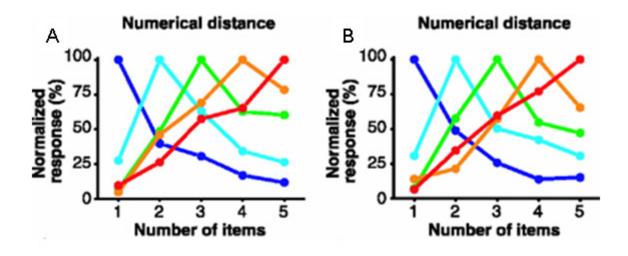


Fig. 2.3 – Profil de réponse des cellules, selon leur numérosité préférée (bleu :1, cyan :2, vert :3, orange :4, rouge :5), pendant la présentation du stimulus (A), et pendant le délai séparant la présentation du stimulus et la réponse (B). Reproduit depuis [Nieder et al., 2002].

Presque en même temps, Nieder, Freedman et Miller [Nieder et al., 2002] ont publié des données similaires, avec des stimuli visuels. Pendant l'enregistrement, les singes effectuent une tâche de reconnaissance de numérosité sur des nuages de points. Les cellules enregistrées par Nieder et ses collègues se trouvent pour une grande part dans le lobe préfrontral [Nieder et al., 2002], et dans le sillon intrapariétal [Nieder and Miller, 2004]. Malgré la différence de localisation, elles présentent les propriétés observées dans

les études précédentes : en effet elles répondent sélectivement à une numérosité particulière (par exemple 4), un peu moins aux numérosités voisines (3, 5), et de moins en moins tandis que l'on s'éloigne de la numérosité préférée (voir figure 2.3). Ayant acquis un volume suffisant de données, Nieder et Miller ont pu analyser finement la structure de la réponse de ces cellules [Nieder and Miller, 2003]. Le taux de décharge pour deux numérosités situées de part et d'autre et à la même distance de la numérosité préférée n'est pas équivalent, c'est-à-dire que les courbes d'activités ne sont pas symétriques lorsqu'on les trace sur une échelle linéaire. Au contraire, elles le deviennent sur une échelle logarithmique, ce qui est la signature de la "loi de proportionnalité". En effet, si l'on nomme n_p la numérosité préférée d'une cellule, α un réel quelconque, la loi de proportionnalité prédit que la cellule répondra avec le même niveau d'activité aux numérosités $\alpha * n_p$ et $\frac{n_p}{\alpha}$. Or ces deux numérosités sont situées à même distance de n_p sur une échelle logarithmique ($\log (\alpha * n_p) = \log (n_p) + \log(\alpha)$, $\log \left(\frac{n_p}{\alpha}\right) = \log (n_p) - \log(\alpha)$).

RÉSUMÉ - Représentation de la numérosité chez les animaux

La capacité de discriminer deux stimuli sur la base de leur numérosité a été observée chez de nombreuses espèces animales, du pigeon au singe en passant par le rat, le chien, le lien, et le dauphin. Dans une certaine limite, ces animaux semblent utiliser un concept abstrait de numérosité, indépendant de la modalité et de la forme précise des stimuli choisis. Chez le singe au moins, la numérosité est un concept naturel, que l'individu utilise sans nécessiter d'entraînement préalable.

Loin d'être restreints à cette seule capacité de distinguer des stimuli de numérosité différente, les animaux sont également capables de manipuler quelques propriétés sémantiques de la numérosité : l'ordre, l'addition, la soustraction.

Tout au long de cet exposé, nous avons reporté fidèlement les données afin que le lecteur se rende compte de quelques profondes et importantes régularités. Ainsi nous avons plusieurs fois mentionné la "loi de proportionnalité" : ce qui compte pour prédire avec quelle réussite deux stimuli vont être discriminés, c'est le quotient entre les deux numérosités. Rappelons également la loi de variabilité scalaire, observée dans le cadre de la production de numérosité : lorsque le nombre moyen produit varie, l'écart type des réponses lui est proportionnel.

Enfin nous avons pu reconnaître cette même loi de proportionalité dans des enregistrements cérébraux. En effet les neurones sensibles au nombres se montrent en réalité sélectifs à une numérosité (leur numérosité préférée) et la manière dont ils répondent aux autres numérosités dépend de cette loi de proportionnalité : deux numérosités séparées de la numérosité préférée par un même quotient donnent lieu à la même réponse neurale.

2.2 Cognition numérique chez le bébé

2.2.1 Introduction

Nous avons exposé dans le paragraphe précédent quelques preuves de l'existence d'une représentation de la numérosité chez l'animal. Ce type de représentation est présent chez un large éventail d'espèces, incluant les singes, nos plus proches cousins. Aussi semble-t-il plausible de croire que nous, humains, sommes dotés d'un système homologue au leur pour représenter des quantités.

Or, l'homme adulte fait montre de capacités variées en arithmétique, qui dépassent de loin les connaissances rudimentaires que l'on a démontré chez les animaux. Nous insistions, par exemple, sur la faiblesse des animaux pour différencier des quantités proches. Huit peut être distingué de 16, mais il n'est pas sûr que la différence entre 8 et 10 soit perçue. Il ne fait aucun doute que la plupart des humains adultes peuvent percevoir, exprimer, expliquer, utiliser la différence entre deux quantités, quelles qu'elles soient. L'exposé de la richesse des systèmes écrits et oraux développés par l'Homme au fil des âges nous en convaincra encore (cf chapitre 9); ces techniques ont justement été inventées pour s'assurer de l'exactitude des quantités exprimées et manipulées.

Nos compétences arithmétiques ont-elles un lien avec le système qu'utilisent nos cousins? Sommes-nous dotés de ce système? Si oui, intervient-il dans l'apprentissage des mathématiques? A quel âge apparaît-il? Les animaux testés sont tous adultes, sans exception, aussi il est difficile d'inférer des expériences précédentes quelque information sur l'ontogénèse du système de représentation des quantités. Par contre, nous pouvons rechercher la présence d'un système de représentations des numérosités chez le bébé humain. Au bout de quelques années de vie, à force d'être en contact avec des représentations exactes des nombres (langage, notation en chiffres arabes...), le petit humain évolue nécessairement, de telle sorte qu'il devient délicat de comparer ses compétences avec celles des animaux.

2.2.2 Premières observations

Sous l'influence de Piaget et du courant constructiviste, on a longtemps pensé que le bébé naissait vierge de toute connaissance et de tout a priori sur le monde. Durant sa première année de vie, il serait dans une phase dite "sensori-motrice" : c'est-à-dire explorant à la fois le produit du monde sur ses sens et les effets de ses commandes motrices. Très progressivement, il se construirait des connaissances logiques et mathématiques (dont la notion de nombre) par l'observation et l'internalisation de certaines régularités de l'environnement. Il lui faudrait alors plusieurs années avant de comprendre ce qu'est le nombre, à savoir la propriété d'un ensemble qui reste invariante quand il déplace les objets de l'ensemble ou les remplace par d'autres. Vers 4 ou 5 ans seulement, il aurait acquis le principe fondamental de conservation du nombre. Dans cette perspective il n'était pas naturel de rechercher la trace de représentations numériques dès la naissance.

Cependant, c'est bien ce que découvrent les études entreprises 30 ans plus tard. En 1980, Starkey et Cooper [Starkey and Cooper, 1980] utilisent la préférence des bébés pour la nouveauté, dans un paradigme d'habituation. Ils présentent plusieurs fois de suite des images contenant 2 (respectivement 3) points à des

bébés de 4 mois, jusqu'à ce que les bébés semblent se lasser. A ce moment-là, survient une image test, contenant selon les cas 2 ou 3 points. Starkey et Cooper observent que lorsque la numérosité de l'image change par rapport à la phase d'habituation, les bébés regardent significativement plus longtemps vers le stimulus que lorsque la numérosité reste la même. Des résultats identiques ont été trouvés quelques années plus tard chez des nouveaux-nés de quelques jours [Antell and Keating, 1983], en suivant exactement le même paradigme.

D'autres études ont répliqué ces mêmes résultats sur les numérosités 2 et 3 à différents âges et avec différents stimuli (dessins de taille variable, 10-12 mois [Strauss and Curtis, 1981]; formes en mouvements, plusieurs âges entre 5 et 13 mois [van Loosbroek and Smitsman, 1990]; syllabes, 4 jours [Bijeljac-Babic et al., 1993]; sauts d'une poupée, 6 mois [Wynn, 1996]). Mais contrairement à ce qu'on a pu observer chez les animaux, les résultats sur la discrimination de plus grands nombres sont plus irréguliers. Originellement, Starkey et Cooper, comme Antell et Keating, n'ont observé aucune discrimination par les bébés des nombres 4 et 6. De même, dans l'étude de Strauss et Curtis, les bébés ne parviennent pas à distinguer 4 et 5. Parallèlement, Treiber et Wilcox [Treiber and Wilcox, 1984] observent un regain d'intérêt pour un changement de 4 à 5 points chez des bébés de 4 mois. Que croire donc?

2.2.3 Les contrôles nécessaires

En fait, les études citées ci-dessus souffrent toutes d'un manque de contrôle sur quelque paramètre nonnumérique. En effet, même si les auteurs ont toujours voulu écarter les stratégies alternatives, les fortes contraintes liées à ce type d'expérimentation ont en général introduit des failles dans le dessin expérimental. En effet, s'il est possible d'entraîner des animaux sur un nombre considérable de stimuli, tout en faisant varier les paramètres non-numériques pour écarter toute stratégie de bas niveau, les expériences avec des bébés sont en général de courte durée et ne permettent pas ces précautions.

Par exemple, dans leur expérience historique Starkey et Cooper présentent des points alignés. Ils décorrèlent le nombre de la largeur et de la densité du stimulus, mais ne font pas en même temps varier la taille des points : la quantité de matière (somme des aires de tous les points) augmente donc avec le nombre. La même critique vaut pour Antell et Keating qui utilisent exactement le même protocole. Strauss et Curtis, quant à eux, ont déployé un effort considérable pour empêcher les enfants de se baser sur des paramètres non numériques. Cependant, dans les deux exemples donnés, les stimuli test où la numérosité change sont différents de tous les stimuli d'habituation du point de vue de la quantité de matière, ce qui n'est pas le cas lorsque le nombre ne change pas. De la même façon, la quantité totale de 'matière' peut expliquer les résultats de Van Loobsbroek et Smitsman : même s'ils prennent la peine de contrôler la luminance totale de leurs stimuli, la taille des objets est constante et la quantité de matière totale augmente donc avec le nombre. Quant aux études dans d'autres modalités, on peut facilement exhiber des paramètres selon lesquels la tâche est soluble sans faire appel à la numérosité : position temporelle de l'accent tonique pour l'étude sur les syllabes, quantité de mouvement pour l'étude sur les sauts de poupée. Enfin, curieusement, alors que Treiber et Wilcox sont les seuls à montrer une discrimination dans les plus grands nombres (4 vs 5), leur

dessin expérimental semble contrôler minutieusement toutes sortes de variables...

Devant un tel constat, certaines équipes se sont véritablement demandé si les résultats positifs précédents étaient liés à la perception de la numérosité, ou plutôt d'un autre paramètre. C'est le cas par exemple de Clearfield et Mix [Clearfield and Mix, 1999]. Après une période d'habituation à deux ou trois éléments, ils testent la réaction des bébés à deux sortes de stimuli : les premiers sont nouveaux du point de vue de la numérosité mais familiers par la quantité de matière présente, les deuxièmes au contraire sont familiers par la numérosité et nouveaux par la quantité de matière. Les résultats sont sans appel : les bébés montrent un regain d'intérêt lorsque la quantité de matière change (mais la numérosité reste la même), et restent indifférents lorsque la numérosité change (mais la quantité de matière reste la même). La même observation a été répliquée ensuite par Feigenson, Carey et Spelke [Feigenson et al., 2002b], sur des stimuli de numérosité 1 et 2. Ces résultats ne permettent pas de conclure que c'est effectivement la quantité de matière qui guide les réponses des nouveaux-nés; mais ils montrent que ce n'est en tout cas pas la numérosité. Sur ce genre de stimuli, à savoir des stimuli visuels contenant au maximum 3 éléments, la numérosité n'est donc pas toujours un attribut saillant pour les bébés.

Cependant, Feigenson a montré récemment que dans certaines conditions expérimentales (ensemble hétérogène d'objets), l'attention des bébés est attirée vers la numérosité, tant et si bien que ceux-ci se révèlent indifférents aux variations des paramètres non-numériques [Feigenson, 2005]. Ces dernières expériences prouvent que les bébés sont bien capables de représenter la numérosité, mais cette information leur est parfois inaccessible, car ils préfèrent s'intéresser à d'autres aspects des stimuli.

2.2.4 Transfert entre modalités

Au début des années 80, alors que les premiers papiers sur la perception de la numérosité par les nouveauxnés venaient d'être publiés et s'accordaient à conclure que les bébés parvenaient à discriminer 2 et 3, Starkey, Spelke et Gelman [Starkey et al., 1983, Starkey et al., 1990] ont voulu généraliser ces résultats à plusieurs modalités. Elles supputent en effet qu'une représentation abstraite de numérosité apparaîtrait très tôt dans le développement. Pour tester leur hypothèse, elles imaginent une tâche où les bébés sont confrontés à la fois à des stimuli auditifs ou visuels. Deux images apparaissent sur un écran : l'une contient 2 objets et l'autre en contient 3. Au bout d'une seconde, un stimulus auditif est joué : il s'agit d'une séquence de 2 ou de 3 sons. A deux reprises et avec 7 ans d'écart, Starkey, Gelman et Spelke montrent que les bébés de 7 mois regardent plus longuement l'image qui contient autant d'objets que la séquence auditive contient de sons. La démonstration était éloquente et outrepassait toutes les critiques sur la confusion entre numérosités et autres paramètres.

Plusieurs tentatives ont été menées pour répliquer ces résultats, vainement. Moore et ses collègues [Moore et al., 1987] obtiennent un résultat contraire : leurs sujets préfèrent regarder plus longuement la diapositive qui contient un nombre d'objets différent du nombre de sons entendus. Plus récemment, Mix, Levine et Huttenlocher [Mix et al., 1997] ont tenté par deux fois de répliquer l'expérience et obtenu des résultats dans le même sens que Moore et al, puis des résultats nuls. Starkey, Gelman et Spelke expliquent les

données de Moore et al en invoquant une différence méthodologique. En effet, dans leurs propres résultats, elles observent que les effets ne sont pas apparents dès les premiers essais, mais c'est seulement dans leur deuxième bloc que les bébés commencent à montrer une préférence. Or, Moore et al font passer deux blocs d'essais eux aussi, mais en imposant une pause de plusieurs minutes entre les deux. Cette pause longue a dû perturber les efforts des bébés au moment même où ils étaient en train de découvrir la correspondance entre stimuli auditifs et visuels. Starkey, Gelman et Spelke parviennent à obtenir les données de Moore pour les réanalyser différemment : elles observent que vers la fin du premier bloc d'essais, les bébés commençaient à montrer une préférence pour l'image correspondant au son. Il est donc possible que sans cette pause, les deux expériences aient donné le même résultat. Mix, Levine et Huttenlocher, quant à eux, ont introduit un changement d'une autre nature dans les méthodes expérimentales : alors que dans toutes les expériences de Starkey, Gelman et Spelke, les stimuli auditifs ne changent pas de numérosité pendant plusieurs essais de suite, Mix, Levine et Huttenlocher présentent leurs séquences auditives dans un ordre totalement aléatoire. Comme on l'a vu, l'effet de préférence visuelle est assez long à se mettre en place, il a pu donc être annihilé par cette manipulation.

En somme, l'effet de préférence visuelle apparaît bien fragile s'il dépend autant des conditions expérimentales. Comme toutes les expériences avec les bébés, il met en jeu des hypothèses fortes sur le comportement de l'enfant, qu'on suppose reproductible en moyenne, bien qu'il soit extrêmement variable. Il est souvent nécessaire de tester un très large échantillon d'enfants avant d'obtenir des résultats robustes, même si les enfants les plus distraits sont d'office exclus de la population de l'étude (en moyenne par expérience : Bijelic-Babic et al : 45 (+ 29 exlus), Treiber et Wilcox : 18 bébés (+ 7 exclus), Van Loosbroek et al : 30 bébés (+25 exclus), Wynn 96 : 20 bébés (+ 9 exclus), Feigenson et Carey : 17 (+3 exclus), Clearfield et Mix : 16 bébés (+1 exclus), Starkey et al : 19 bébés (+7 exclus)). La recherche en psychologie du développement attend encore une technique expérimentale qui pourrait réduire les coûts de passation.

Dans l'expérience de préférence visuelle, il se peut en fait que les bébés n'aient pas utilisé une représentation abstraite de numérosité pour répondre. On peut imaginer en effet un scénario où les bébés déplacent leur attention sur les objets de l'image au fur et à mesure que les sons retentissent; s'il se trouve qu'ils ont parcouru tous les objets à la fin de la séquence, ils sont interloqués et continuent à regarder. On pourrait imaginer que ce comportement ne soit pas l'effet d'une stratégie délibérée consistant à établir une bijection entre l'image et les sons, il s'agirait par exemple d'un réflexe de réorientation de l'attention. Sous cette hypothèse, les résultats seraient effectivement fragiles, suspendus à une même séquence comportementale chez tous les bébés.

Conscientes de l'existence d'explications alternatives, Starkey, Gelman et Spelke réalisent un dernier test, utilisant une procédure classique d'habituation. Les bébés sont habitués à une numérosité dans la modalité visuelle : plusieurs images contenant le même nombre d'objets (2 ou 3 selon les bébés) leur sont présentées successivement. Puis, un disque noir apparait sur l'écran, conjointement, des séquences de 2 ou 3 sons sont jouées. Les bébés regardent alors plus longuement le disque lorsque le nombre de sons dans la séquence correspond au nombre d'objets auquel ils ont été habitués dans la modalité visuelle. Bien que l'effet

d'habituation reporté soit inversé par rapport aux effets classiques, ces résultats traduisent une différenciation sur la base de la numérosité habituée, qui ne peut plus s'expliquer par des comportements de bas niveau. Ces derniers résultats appuient fortement l'hypothèse d'une représentation abstraite de numérosité. La passage des stimuli visuels aux stimuli auditifs au moment du test permettrait d'attirer l'attention de l'enfant, suffisamment pour susciter une réaction au changement de numérosité; alors que quand on reste dans la même modalité, ce regain d'attention n'a pas lieu et par conséquent l'enfant n'accède pas à la numérosité, trop peu saillante.

2.2.5 Discrimination de grandes numérosités

S'écartant du domaine des petits nombres, aux résultats partagés, l'équipe de Spelke s'est intéressée ces dernières années à la perception des grandes numérosités. Dans leur première expérience, Xu et Spelke [Xu and Spelke, 2000] habituent des bébés de 6 mois à des images contenant 8 ou 16 points, en prenant de varier la taille des points, et leur disposition. Elles présentent ensuite aux bébés des images test contenant 8 ou 16 points. Des points de la taille de ceux de l'image test ont été déjà vus au cours de la procédure d'habituation, et leur taille est calculée en sorte que la quantité de matière ne soit pas plus nouvelle par rapport aux images d'habituation dans aucune des deux conditions de test. Par ailleurs la taille de ces images test varie pour que la densité ne soit pas non plus un indice. Dans ces conditions, les bébés regardent plus longuement l'image lorsque la numérosité est nouvelle. Xu et Spelke ont par ailleurs appliqué exactement le même dessin expérimental à des numérosités plus proches entre elles (8 et 12) : dans ce cas les bébés de 6 mois ne montrent aucune réponse particulière.

Comme pour les animaux, c'est bien le quotient entre les deux nombres étudiés qui prédit s'ils seront distingués ou pas. En effet, dans des conditions similaires, les bébés de 6 mois distinguent 16 points de 32, mais confondent 16 points et 24 points. Ce résultat explique l'échec des bébés à la discrimination de 4 et 6 dans les expériences citées ci-dessus : en effet le quotient $\frac{4}{6}$ est égal à $\frac{16}{24}$.

Les bébés de 6 mois sont donc capables de distinguer entre elles des numérosités élevées, si celles-ci sont dans un rapport de $\frac{1}{2}$. En testant des bébés plus âgés, Xu et Arriaga [Xu and Arriaga, 2003] se sont aperçues que les capacités numériques s'affinaient avec l'âge. Ainsi, à 9 mois, le bébé perçoit la différence entre deux numérosités séparées par un quotient de $\frac{2}{3}$, ce qu'il ne faisait pas à 6 mois.

Quel est le degré d'abstraction de la représentation qui permet au bébé de distinguer des numérosités visuelles? Lipton et Spelke [Lipton and Spelke, 2003] se sont ensuite intéressées à la modalité auditive. Dans un paradigme d'habituation semblable au précédent, elles observent exactement le même résultat : les bébés de 6 mois sont capables de distinguer les numérosités 8 et 16 (quotient $\frac{1}{2}$), mais pas les numérosités 8 et 12 (quotient $\frac{2}{3}$). A 9 mois, par contre, le bébé fait la différence entre 8 et 12, mais pas entre 8 et 10 (quotient $\frac{4}{5}$). L'extrême similarité entre ces performances et celles observées dans les paradigmes visuels suggère fortement que les bébés ont utilisé la même représentation abstraite de numérosité dans les deux cas.

Opérations sur les numérosités

Comme pour les animaux, on peut se demander si les bébés sont capables de faire des calculs approximatifs sur des grandes numérosités. Peu de tests ont été faits sur ce sujet à ce jour¹. La relation d'ordre sur les numérosités a été testée par Brannon [Brannon, 2002]. Des bébés de 9 et 11 mois étaient confrontés à des séquences d'images, nuages de points triés en ordre ascendant ou descendant. Plusieurs séquences étaient présentées successivement dans le même ordre, jusqu'à ce que le bébé présente des signes de lassitude. A ce moment-là on testait sa réaction face à une séquence test, qui pouvait être soit ascendante soit descendante. A 9 mois, les bébés réagissent de la même façon aux deux types de séquences; à 11 mois cependant, ils montrent un regain d'intérêt à des séquences présentées dans un ordre nouveau. Les bébés sont donc capables de reconnaître les relations d'ordre entre les numérosités à l'âge de 11 mois.

Très récemment, des bébés de 5 mois ont été mis à l'épreuve d'un test d'addition et de soustraction approximative. Dans cette expérience [McCrink and Wynn, 2004], on présente un film où des objets se cachent derrière un écran. Les objets changent continuellement de taille et de forme pour décourager les participants de s'intéresser aux indice physiques (taille des points, quantité de matière, densité). Une fois que les objets sont cachés, d'autres viennent s'ajouter au premier groupe (condition additive), ou certains sortent de derrière l'écran (condition soustractive). Enfin, l'écran disparaît et révèle les objets cachés. Deux opérations ont été testées ainsi : une addition (5+5) et une soustraction (10-5). Dans les deux cas, le résultat proposé était soit 5, soit 10. A 5 mois, les bébés regardent plus longtemps le résultat faux que le résultat correct : s'ils sont capables de réagir différemment à ces deux valeurs, c'est certainement qu'ils attendaient un résultat approximativement correct.

¹La capacité des bébés à additionner et soustraire des petites numérosités, en particulier les célèbres résultats de Wynn [Wynn, 1992a] seront discutés plus loin au chapitre 7

RÉSUMÉ - Représentation de la numérosité chez les bébés

Ce n'est que récemment que des preuves tangibles de l'existence d'une représentation approximative de la numérosité ont été mises en évidence chez le tout petit (à partir de 6 mois). Cette représentation semble amodale, ordonnée, et entre dans des calculs élémentaires (additions, soustractions). Les performances des bébés humains présentent les mêmes caractéristiques que celles des animaux, en particulier, elles suivent la loi de proportionalité : c'est le quotient entre deux numérosités qui détermine si celles-ci sont ou non discriminables.

Cependant, le tableau précédent ne donne qu'un aperçu partiel des recherches actuelles sur les bébés. Dans un souci de cohérence avec l'exposé sur les modèles animaux, nous nous sommes surtout intéressés aux performances des bébés dans le domaine des grands nombres. Dans cette limite, nous avons vu que les performances des bébés et des animaux coïncidaient. Cela suffit à l'argument présent, car à cette étape notre intention était simplement de montrer que l'on retrouve le système animal de représentation des numérosités chez l'humain avant l'acquisition du langage. Il serait cependant difficile de prétendre donner une revue de la littérature sur la cognition numérique des bébés en occultant totalement le débat sur les petits nombres. Dans plusieurs tâches impliquant des petites numérosités, la loi de proportionalité, signature du système que nous avons identifié chez les animaux, n'est pas vérifiée. Ce point sera exposé en détail et discuté plus loin dans le texte.

2.3 Cognition numérique chez l'adulte

Nous avons vu au cours des paragraphes précédents que les animaux et les bébés possèdent des capacités numériques semblables, qui leur permettent en particulier de distinguer entre plusieurs types de stimuli sur la base de leur numérosité. Certaines caractéristiques, comme la sensibilité à la distance numérique entre les deux stimuli, sont retrouvées à la fois dans les deux populations, suggèrant que le même système cognitif est à l'oeuvre dans les deux cas. Ce système, s'il est commun aux deux populations, est-il nécessaire au développement du bébé, jusqu'au stade adulte? En particulier, en retrouve-t-on la trace dans les performances de l'adulte?

2.3.1 Traitement de la numérosité des stimuli non symboliques

Tâches purement non symboliques

Quelles sont les performances des adultes lorsqu'ils sont confrontés à des stimuli semblables à ceux que l'on montre aux bébés et aux animaux. Dans une première tentative, Buckley et Gillman [Buckley and Gillman, 1974] demandent à leurs sujets de comparer des nuages de points. Que les points suivent des configurations canoniques ou soient disposés aléatoirement, Buckley et Gillman identifient deux effets complémentaires : le taux d'erreur augmente lorsque la distance entre les numérosités des deux nuages diminue (effet de distance), et il augmente également avec le minimum des deux numérosités à comparer (effet de taille). Dans une tâche un peu différente d'identification de numérosité, Van Oeffelen et Vos [van Oeffelen and Vos, 1982] observent les mêmes effets et les unifient en invoquant la seule propriété de la loi de proportionnalité. Cette loi prédit en effet l'effet de distance, puisque deux nombres proches en distance $(n_1 - n_2)$ sont également proches en quotient $(\frac{n_2}{n_1})$. De plus, à distance égale entre les nombres, le quotiebt $\frac{n_1}{n_2}$ se rapproche de 1 lorsque n_1 augmente $(\frac{n_2}{n_1} = \frac{n_1+d}{n_1} = 1 + \frac{d}{n_1})$: la loi de proportionalité prédit donc l'effet de taille. Face à des stimuli visuels, on retrouve donc la même signature que dans le comportement des animaux et des bébés.

Qu'en est-il des autres modalités? La représentation qui nous permet de comparer des nuages de points est-elle propre aux stimuli visuels, présentés simultanément, ou utilisons-nous à ce dessein une représentation abstraite de numérosité? Barth, Kanwisher et Spelke [Barth et al., 2003] se sont intéressées à ce problème. Elles étudient les performances des adultes dans des tâches de comparaison impliquant des stimuli auditifs et visuels. Les comparaisons sont effectuées à l'intérieur de chaque modalité (visuel-visuel et auditif-auditif) et entre les deux modalités (visuel-auditif). Dans cette tâche, les auteurs observent toujours l'influence cruciale du quotient des deux numérosités sur les performances, que ce soit à l'intérieur de chaque modalité, ou entre stimuli auditifs et visuels. De plus, les adultes ont exactement le même niveau de performance pour comparer des stimuli de modalités différentes que pour comparer des stimuli visuels (les stimuli auditifs conduisent à un niveau de performances légèrement supérieur). Si la numérosité était encodée dans un format différent pour chaque numérosité, la tâche de comparaison entre modalités aurait nécessité soit de transformer l'information dans un format abstrait, soit de traduire l'une des deux modalités dans l'autre. Ces manipulations, très vraisemblablement, engendreraient des pertes d'information, ce qu'on ne retrouve

pas dans les données. Selon Barth et al, ces données montrent donc que la même représentation abstraite de la numérosité est utilisée dans tous les cas.

Par contre, à la différence du taux d'erreurs, le temps de réponse présente un coût quand les stimuli ont été présentés dans des modalités différentes. Ceci pourrait traduire le fait que la comparaison de stimuli entre deux modalités requiert une étape supplémentaire (acces à une représentation de la numérosité qui soit abstraite c'est-à-dire indépendante de la modalité, traduction d'un des stimuli de son format d'origine au format de l'autre stimulus). Comme indiqué par les taux d'erreurs, il est possible que cette étape ait lieu sans perte d'information.

Comme l'animal et le bébé, l'adulte résoud des problèmes arithmétiques sur les numérosités [Barth et al., 2005]. Des expériences sur des nuages de points montrent que nous sommes capables d'évaluer le résultat d'additions et de soustractions de manière approximative. Dans ces expériences, les sujets devaient juger si le résultat de l'opération était supérieur ou inférieur en numérosité à un nuage de point proposé. Là encore, c'est le quotient entre ce résultat proposé et le résultat réel qui détermine le niveau de performance des sujets.

L'équipe de Gallistel et Gelman a choisi une autre approche pour rechercher les traces du système ancien de représentation des numérosités chez l'homme [Whalen et al., 1999, Cordes et al., 2001a]. Leurs expériences s'apparentent à la tâche de production de numérosité de Mechner [Mechner, 1958]. Ils présentent à leur sujet un nombre en chiffres arabes, et lui demandent de taper plusieurs fois de suite sur un bouton jusqu'à atteindre ce nombre. Grâce à plusieurs contrôles, notamment une condition de suppression articulatoire où le sujet doit répéter la même syllabe à chaque appui, ils parviennent à forcer leurs sujets à réaliser cette tâche sans compter les appuis. Dans ces conditions, le nombre moyen d'appuis réalisés par les sujets est proche du nombre requis, et l'écart type des réponses est proportionnel au nombre moyen d'appuis (voir figure 2.4). Plus le nombre requis est élevé, plus le nombre moyen d'appuis est élevé lui aussi, et plus les réponses sont variables. Dans une condition contrôle, où les sujets doivent compter explicitement chaque appui, les réponses sont bien moins variables : l'écart-type des réponses est proportionnel cette fois à la racine carrée du nombre d'appuis, conformément aux prédictions d'un modèle avec un taux d'erreur constant à chaque unité comptabilisée.

En imposant des variations de ce même paradigme, ils parviennent à des résultats compatibles avec ceux exposés précédemment. En effet, ils montrent dans un premier temps que l'adulte est capable de traduire la numérosité d'un stimulus visuel en une suite d'appuis [Gallistel and Gelman, ress]; ce résultat fait écho aux premières observations de Barth et de ses collègues. Dans un deuxième temps, Cordes demande à ses sujets d'estimer une somme ou une différence à partir de 2 séquences de flashes lumineux, et d'exprimer le résultat sous la forme d'une suite d'appuis, le tout sans compter. Les sujets parviennent à réaliser cette tâche, et la variabilité de leurs réponses suit les lois de combinaison des variances appliquées à la distribution des réponses dans la tâche de transfert visuel-tactile.

En résumé, l'adulte extrait l'information de numérosité des stimuli non-symboliques. Il est capable de comparer entre elles les numérosités de stimuli présentés dans des modalités différentes, soit qu'il utilise une représentation abstraite de numérosité, soit qu'il puisse convertir des numérosités visuelles en un format

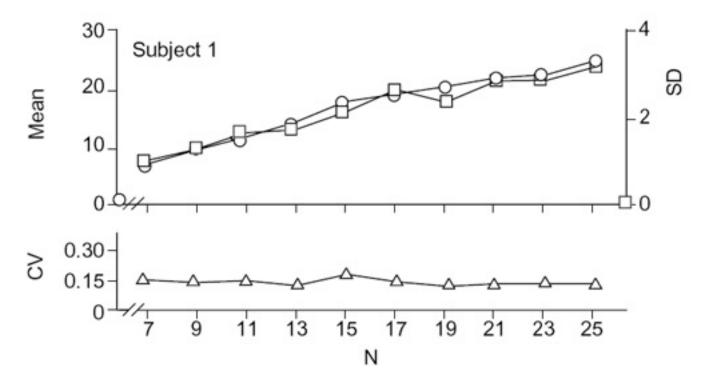


FIG. 2.4 – Moyenne (axe de gauche, graphique du haut), écart-type (axe de droite, graphique du haut) et coefficient de variation (quotient entre l'écart-type et la moyenne; graphique du bas) des distributions des nombres d'appuis obtenus par Whalen, Gallistel et Gelman [Whalen et al., 1999], dans une expérience où des adultes devaient produire une numérosité donnée sans compter. Comme chez l'animal, ces données chez l'humain suivent la loi de la variabilité scalaire : la largeur des distributions augmente proportionnellement au nombre moyen d'appuis, et ainsi le coefficient de variation est constant. Reproduit depuis [Gallistel and Gelman, 2000].

auditif (ou des numérosités auditives en format tactile, visuel...). Il peut également réaliser des opérations simples (additions et soustractions) sur ces numérosités. Dans les tâches étudiées, ses performances présentent les mêmes caractéristiques que celles des animaux ou des bébés : sensibilité au quotient entre les numérosités dans les tâches de comparaison, augmentation de l'écart type des réponses proportionnellement au nombre exprimé dans les tâches de production.

Tâche d'estimation

Face à des stimuli non-symboliques, nous avons exhibé des comportements humains qui rappellent fortement ceux des animaux. Le système utilisé du pigeon au singe, du rat au dauphin, semblerait donc disponible chez l'être humain, jusqu'à l'âge adulte. Mais participe-t-il au développement des compétences arithmétiques? Si oui, ce système doit pouvoir communiquer les informations de numérosité qu'il détecte, afin qu'elles puissent être transcrites et manipulées comme toute information numérique, sous la forme de symboles abstraits que sont les chiffres, les numéraux dans le langage. La tâche d'estimation, qui consiste à évaluer un nombre d'éléments d'un stimulus sans les compter, a été étudiée attentivement par les psychophysiciens des années 80 et 90. Leurs résultats quantitatifs nous fournissent de précieuses informations sur la structure fine de la représentation de numérosité.

Forme de la fonction de réponse (réponses moyennes) Même si les sujets sont variables dans leurs estimations, leur comportement est extrêmement régulier, dans le sens où il peut être capturé par des fonctions mathématiques précises. Ainsi, après avoir étudié plusieurs tâches liées à l'estimation de nuages de points (estimation simple de nuages, estimation de distance et de quotient entre deux nuages), Indow et Ida [Indow and Ida, 1977] parviennent à un résultat unifié sous la forme d'une loi puissance : $E = \alpha N^k$, où E est l'estimation du sujet, et N le nombre d'éléments du stimulus. Cette même loi puissance a été plusieurs fois observée par Krueger [Krueger, 1972, Krueger, 1982, Krueger, 1984, Krueger, 1989], on la retrouve dans des données plus récentes de production de numérosité [Whalen et al., 1999, Cordes et al., 2001b] et un oeil averti la reconnaîtra également dans les figures de l'article de Minturn et Reese paru en 1951 [Minturn and Reese, 1951] (voir figure 2.5).

Sur ces figures, on trouve la médiane des estimations données par des groupes de 10 sujets, pour des nuages contenant 2 à 200 points. Conformément à la tradition, les échelles sont logarithmiques sur les axes des abscisses et des ordonnées, en sorte que, comme les données sont expliquées par une loi puissance, elles forment une droite sur le graphique. On aperçoit sur ce graphe l'extrême variabilité que l'on observe dans une tâche d'estimation entre les sujets : selon les individus, les estimations données pour 200 points varient entre 50 et 700. Dans cette étude, les sujets sont répartis en deux groupes : ceux qui sur-estiment et ceux qui sous-estiment, mais la plupart des autres publications font état d'une tendance générale à sous-estimer à partir d'une vingtaine de points [Indow and Ida, 1977, Krueger, 1982, Krueger, 1984]. Hollingsworth et ses collègues testent un large intervalle de valeurs et observent que leurs sujets sur-estiment les nuages les moins numéreux (contenant moins de 130 points), et sous-estiment de plus en plus les autres (contenant jusqu'à

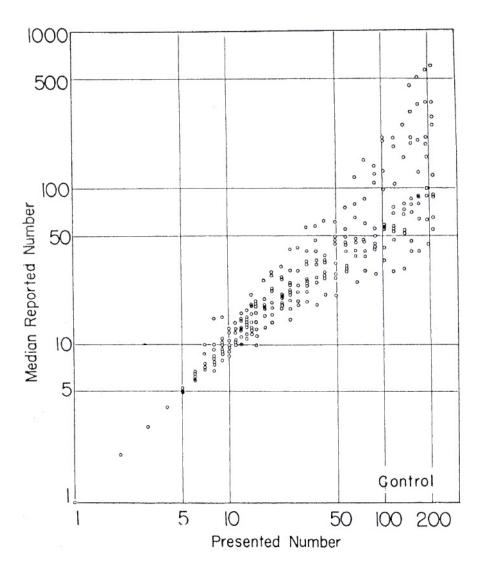


FIG. 2.5 – Médiane des estimations en fonction de la numérosité du stimulus, tracée sur des axes logarithmiques. Ces données ont été recueillies auprès de 10 sujets. Lorsque la numérosité du stimulus augmente, la variabilité entre les estimations augmente aussi. Dans ces données la loi de la variabilité scalaire semble vérifiée : l'écart-type entre les réponses augmente proportionnellement au nombre estimé (forme "en cône"). Reproduit depuis [Minturn and Reese, 1951].

650 points).

Cette tendance à la sous-estimation est modulée au cours du temps : en effet les stimuli sont de plus en plus sous-estimés au fur et à mesure que les sujets s'habituent à la tâche [Krueger, 1982]. Pour s'affranchir de cette tendance, Krueger demande à des sujets de réaliser chacun une seule estimation. Dans cette expérience, il retrouve les mêmes caractéristiques que dans les expériences classiques : relation puissance entre les stimuli et les estimations, variabilité entre les sujets, et tendance globale à la sous-estimation. Cette tendance est un peu moins marquée, comme en témoigne son estimation de la valeur de l'exposant de la fonction puissance : 0.85, alors que dix ans auparavant avec plusieurs estimations par sujets il trouvait 0.72.

Comment expliquer cette tendance générale à sous-estimer? Plusieurs arguments ont été invoqués pour expliquer pourquoi la sous-estimation s'accentue au fur et à mesure des essais. Le premier fait appel à un principe très général, selon lequel la réponse à un essai a tendance à être déviée dans la direction de la réponse à l'essai précédent. Or si on considère un essai au cours duquel un stimulus de numérosité n est présenté, si la présentation des essais est aléatoire, il y a plus de chance que l'essai précédent soit plus proche de la moyenne des essais que celui ci. En effet, si les numérosités présentées sont comprises entre deux valeurs n_{min} et n_{max} , et que l'on suppose par exemple que n est dans la première moitié de l'intervalle $(n < \frac{n_{min} + n_{max}}{2})$, l'intervalle $[n_{min}, n]$ est plus court que $[n, n_{max}]$, aussi l'essai précédent n a plus de chances de se trouver dans $[n, n_{max}]$, c'est à dire soit entre n et la moyenne des valeurs, soit carrément de l'autre côté de la moyenne. La réponse à l'essai aura donc tendance à être déviée vers la moyenne, et au fur et à mesure de l'expérience les réponses devraient toutes se rapprocher de la moyenne. D'autre part, Teghtsoonian et Teghtsoonian [Teghtsoonian and Teghtsoonian, 1978] donnent un argument à peu près équivalent, partant de la constatation que les sujets ont en général tendance à éviter de produire successivement deux réponses trop différentes. Par conséquent, l'intervalle de réponses produites se réduirait à chaque fois que deux stimuli très différents sont présentés successivement, et à terme, les réponses se regroupent autour d'une même valeur.

Ces premiers arguments, s'il sont pertinents au bout d'un certain nombre d'essais, ne permettent pas d'expliquer pourquoi les sujets sous-estiment dès le premier essai dans l'expérience de Krueger [Krueger, 1982]. Celui-ci évoque sans trop y croire un argument de Poulton [Poulton, 1979] : le "biais de contraction", c'est-à-dire la tendance générale des sujets à choisir des réponses qui se rapprochent de la moyenne des valeurs possibles. Il est vrai que les trois effets invoqués jusqu'ici ont des conséquences similaires et qu'il semble bien difficile de séparer leurs rôles respectifs dans les données, ainsi que d'affirmer l'existence simultanée des trois à la fois. De manière générale, il est frappant de constater que les seuls arguments avancés se situent au niveau du choix de la réponse. Il est vrai que, à l'époque, les mécanismes de l'estimation étaient trop peu connus pour qu'une explication puisse être formulée.

Variabilité entre les sujets Nous avons déjà évoqué l'extrême variabilité entre les sujets, au point que Minturn et Reese avaient initialement pensé à séparer deux groupes de sur-estimateurs et sous-estimateurs [Minturn and Reese, 1951]. A la lumière de résultats plus récents, il semble plutôt qu'il existe une continuité

entre tous les types de comportements. Krueger [Krueger, 1982] reporte que la distribution des réponses moyennes de tous les sujets est d'autant plus étalée que le nombre à estimer est élevé. Plus précisément, ces réponses suivent une loi de variabilité scalaire : l'écart type des réponses est proportionnel à la moyenne des réponses. Ceci était également visible dans les données de Minturn et Reese : sur une échelle logarithmique les données sont réparties dans un cône droit centré sur la réponse moyenne (voir figure 2.5).

Variabilité intrasujet Peu d'auteurs se intéressés à la variabilité des réponses à l'intérieur des données de chaque sujet. Souvent le temps de calcul des nuages de points (parfois plus d'une seconde), avec les moyens informatiques de l'époque, ralentissait drastiquement le rythme de l'expérience, et il était peu envisageable de présenter beaucoup de fois le même stimulus. Les estimations sont donc peu fiables; par exemple Krueger [Krueger, 1984] rapporte l'écart type sur deux réponses par sujet et par stimulus, il observe que les réponses aux stimuli moyens sont les plus variables, ce qui reflète certainement plus des effets de bord que la variabilité interne de la numérosité. Logie et Baddeley [Logie and Baddeley, 1987] décrivent une expérience où les sujets doivent évaluer le nombre de flashes lumineux dans une séquence, tout en répétant la syllabe "the". La deuxième tâche semble empêcher les sujets de compter, car leurs réponses sont entâchées d'erreurs, même pour des numérosités peu élevées. Logie et Baddeley remarquent à ce propos que les erreurs augmentent avec le nombre estimé de flashes. Cette observation a été reprise de manière systématique par Whalen et ses collègues, puis reprise par Cordes et al qui proposent une version affinée de la même tâche. Whalen calcule pour chaque sujet le coefficient de variation associé à chaque numérosité, et montre que celui est constant, égal à 0.19 en moyenne. Il constate ainsi que les réponses de chaque sujet suivent une loi de variabilité scalaire, la même loi que l'on observe en rassemblant les données de plusieurs sujets.

Influence des paramètres non numériques Les observations précédentes nous renseignent sur les limites et la précision du processus d'estimation, mais ne nous éclairent pas vraiment sur la nature des mécanismes en jeu. Pour en savoir plus, il était nécessaire d'étudier plus finement l'influence des paramètres de bas niveau qui caractérisent le stimulus. Chaque item est-il pris en compte dans l'évaluation de la numérosité de manière successive ou tous sont-ils comptés parallèlement? Doit-on dans un premier temps individualiser chaque élément ou se sert-on de paramètres globaux tels que, pour un stimulus visuel, la densité des éléments, la taille de l'image, l'aire total des items?

Il est clair que l'estimation n'est pas un processus infaillible. Ainsi, Ginsburg a observé que nous avions tendance à juger qu'un nuage contient plus de points lorsque ceux-ci sont régulièrement espacés [Ginsburg, 1978]. La densité des points joue un rôle crucial dans l'estimation [Krueger, 1972, Hollingsworth et al., 1991]: plus les points sont proches, plus la numérosité du nuage est sous-estimée. Sur la base de ses observations, Allik et Tuulmets [Allik and Tuulmets, 1991] ont développé un modèle de l'estimation qui prédit bien l'influence des différents paramètres. Dans ce modèle, chaque point est perçu de manière floue, comme une tâche se répandant au-delà de ses limites réelles. Les aires de toutes les tâches sont ensuite sommées et la valeur obtenue est directement traduite en un nombre, de manière proportionnelle. Ainsi, si deux points sont proches,

leurs tâches se recouvrent et l'aire totale est diminuée comparativement à un stimulus où tous les points sont éloignés entre eux. Ce modèle rend compte élégamment de l'effet de la densité, néanmoins il souffre d'une faiblesse : les auteurs ne se prononcent pas sur l'étendue de la dispersion de chaque point, alors que ce paramètre est crucial pour les prédictions. Il se contentent de l'ajuster par rapport à leurs données.

Dans une série d'expériences étudiant d'autres types de stimuli, Allik et Tuulmets [Allik and Tuulmets, 1993] retrouvent des effets similaires pour une séquence spatiotemporelle. Les stimuli sont sur-estimés si les points apparaissent de manière régulière dans l'espace et dans le temps; ils sont sous-estimés si ils forment des clusters spatiaux et temporels. Cette expérience suggère que les mécanismes d'estimation de la numérosités pourraient s'appuyer sur les mêmes paramètres que les stimuli soient présentés de manière simultanée ou séquentielle, et peut-être aussi d'une modalité à l'autre. Ce dernier point reste encore à tester.

Effet de la donnée d'un repère Si les estimations produites sont énormément variables d'un sujet à l'autre, cet écart peut être réduit en renseignant les participants sur l'exactitude de leurs réponses. Après avoir mesuré les réponses spontanées de leurs sujets, Minturn et Reese [Minturn and Reese, 1951] enregistrent une deuxième session où la réponse correcte est donnée après chaque essai. Dans ces conditions, tous les sujets, les mêmes que ceux de la première session, parviennent à des productions hautement similaires. Comme l'expérience ne comportait qu'un nombre restreint de numérosités différentes, on pourrait objecter que la tâche dans cette deuxième partie est totalement différente : il s'agit d'identifier la quantité de points présents parmi un ensemble de possibilités. Or, les auteurs remarquent que le changement dans les réponses intervient dès le début de ce second bloc, et même dès le premier essai : l'information observée pour une numérosité est transférée aux autres numérosités. Huit mois après, ils refont passer les mêmes sujets en estimation spontanée, et s'aperçoivent que ceux-ci sont restés beaucoup plus précis que des sujets naïfs. Krueger [Krueger, 1984] réalise une observation similaire. Arrivé à la moitié de l'expérience d'estimation, il montre aux sujets un nuage et leur révèle que celui-ci contient 200 points. Cet indice isolé réduit considérablement la variabilité entre les sujets.

RÉSUMÉ - Estimation de la numérosité des stimuli

Cet exposé de l'étude de la tâche d'estimation a mis l'accent sur la régularité des données. On retiendra la forme de la fonction de réponse, qui suit une loi puissance et présente une tendance générale vers la sous-estimation. Cette loi puissance pourrait traduire le fait que les représentations internes sont compressées. La variabilité des données suit une loi scalaire, que l'on considère les réponses moyennes de plusieurs sujets, ou l'ensemble des réponses d'un seul sujet. La variabilité entre les sujets se trouve drastiquement et durablement réduite lorsqu'on donne ne serait-ce qu'un seul repère aux participants. Dans l'ensemble, la précision de la représentation interne de numérosité n'est pas très bonne mais elle peut être améliorée. Une deuxième série de résultats nous renseignent sur le mécanisme à l'oeuvre dans l'estimation de la numérosité, du moins dans la modalité visuelle. La densité des stimuli a une influence majeure sur les performances : plus un nuage est dense, plus il est sous-estimé. Ces données pourraient suggérer que le mécanisme estimant la numérosité implémente une approche globale, basée sur la densité. Mais le succès du modèle occupancy de Allik et Tuulmets, qui, au contraire, alloue un poids spécifique à chaque élément, nous prévient de toute conclusion hâtive. Par ailleurs, il serait important de vérifier si le mécanisme proposé par Allik et Tuulmets est propre au système visuel ou s'il reflète des caractéristiques globales que l'on trouverait dans tous les systèmes perceptifs.

2.3.2 Traitement de stimuli numériques symboliques

Jusqu'ici, nous avons passé en revue les performances d'un adulte, s'il est confronté à des stimuli nonsymboliques semblables à ceux que l'on présente aux animaux et aux bébés. Ces performances montrent en
particulier un effet de distance : plus deux numérosités sont proches plus elles risquent d'être confondues.
L'effet de distance caractèrise soit une représentation de type analogique, soit résulte d'un processus d'encodage imprécis. Par analogique, nous voulons signifier que les codes pour deux numérosités se ressemblent
d'autant plus que ces deux numérosités sont proches. Par exemple, un codage par magnitude interne est
analogique. Dans ce cas, naturellement deux numérosités proches seront plus souvent confondues que deux
numérosités distantes. Mais on peut trouver une explication à l'effet de distance même si le code n'est pas
analogique : il suffit de supposer que le processus d'extraction de la numérosité est imprécis, et donne parfois
un résultat erroné. Imaginons par exemple que ce processus estime la densité d'un stimulus, sa surface totale,
et qu'il multiplie les deux. Le résultat d'une telle estimation serait approximatif, et même si le code pour la
numérosité est discret et non analogique, on verrait apparaître un effet de distance.

Du moins, nous avons mis en évidence que l'adulte se comporte comme l'animal ou le bébé lorsqu'il lui est donné à traiter des stimuli non-symboliques. Cela suggère que ce système, hérité du monde animal, développé dès les premiers mois de vie, continue d'être utilisé à l'âge adulte, est intégré dans l'architecture cognitive complexe qui lui donne accès aux symboles mathématiques. Les résultats d'estimation prouvent en effet que nous sommes capables de traduire une représentation de numérosité dans le système numérique de notre langue, ou en un nombre écrit en chiffres arabes.

Ce paragraphe cherche à montrer que nos représentations analogiques de numérosité sont étroitement liées à nos performances en mathématiques. Bien loin de constituer un module isolé spécifiquement dédié à l'estimation de nuage de points ou de séquences sonores, elles entrent dans un certain nombre de calculs abstraits, au coeur même de nos compétences mathématiques.

L'effet de distance comme indice de l'utilisation d'une représentation sémantique

Dans un article princeps, Moyer et Landauer [Moyer and Landauer, 1967] montrent que la comparaison de deux chiffres arabes obéit aux mêmes lois psychophysiques que la comparaison de deux stimuli situés sur un continuum perceptif. Ils reconnaissent en particulier l'effet de distance : le temps de réponse augmente lorsque la distance numérique entre les chiffres diminue. Il n'est plus possible dans ce contexte d'invoquer un processus bruité qui calculerait de manière imprécise la numérosité des chiffres. Les chiffres sont des symboles totalement identifiables; ils ne sont pas plus semblables à leurs voisins qu'aux autres. Les résultats précédents indiquent que les sujets ont accédé à une représentation sémantique avant d'effectuer la comparaison. Cette représentation est telle que deux nombres proches sont moins facilement distinguables : il est naturel alors de postuler que la représentation sémantique en question est analogique.

En plus de l'effet de distance, Moyer et Landauer observent un effet de taille : à distance égale, deux nombres petits sont plus rapidement traités que deux nombres grands (par exemple le temps de réponse pour comparer 7 et 8 est plus important que pour comparer 1 et 2). Ce même effet était présent également avec des stimuli non symboliques [Buckley and Gillman, 1974]. Ainsi Buckley et Gillman étudient systématiquement la comparaison de chiffres et de nuages de points, et trouvent des résultats très semblables dans les deux cas. Ils réalisent un graphique où les nombres de 1 à 9 sont placés dans un espace à deux dimensions, avec la convention que la distance entre les nombres représente leur proximité sur une échelle interne (dans notre cas la distance entre une paire de stimuli est inversement proportionnelle au temps de réponse pour comparer ces deux stimuli). Les configurations obtenues pour des stimuli symboliques et non symboliques sont extrêmement proches.

Les chiffres de 1 à 9 sont donc comparés de la même façon que des nuages de points, en passant par une représentation analogique de quantité. D'autres expériences ont étendu ce résultat aux nombres à deux chiffres [Dehaene et al., 1990, Hinrichs et al., 1981, Hinrichs et al., 1982]. L'effet de distance s'avère par ailleurs extrêmement robuste; après une dizaine d'heures de pratique de la tâche de comparaison, il est toujours significatif. La comparaison de deux chiffres arabes, tâche que tous les ordinateurs résolvent sans problème par des algorithmes aveugles à la sémantique, est étroitement liée à une représentation sémantique de la quantité chez l'humain.

Enfin, l'enregistrement d'un effet de distance n'est pas restreint aux tâches de comparaison : on le retrouve par exemple quant il faut simplement juger de l'identité entre deux chiffres [Dehaene and Akhavein, 1995, Duncan and McFarland, 1980], alors même que la taille des nombres en question n'est pas pertinente pour la tâche. Ainsi les liens entre les symboles numériques et les représentations sémantiques sont si forts que la magnitude des nombres est évoquée automatiquement à la lecture d'un chiffre.

Dissociation entre opérations arithmétiques approximatives et exactes

Données comportementales Comme la comparaison, tout un ensemble de tâches sont basées sur une représentation sémantique de la quantité. Nous avons parlé dans le paragraphe précédent de l'estimation, une tâche à la frontière entre symboles et numérosités concrètes. Bien qu'il soit assez rare d'être confronté à cette forme d'estimation, certains de ses dérivés sont très présents dans la vie quotidienne. Ainsi Dehaene et Marques [Dehaene and Marques, 2002] se sont intéressés à l'estimation des prix à la période critique du passage à l'euro. Ces auteurs ont demandé à des sujets d'évaluer le prix de quelques articles familiers, dans leur monnaie courante et en euros. Ici la tâche d'estimation est complètement détachée de toute numérosité concrète : le stimulus (nom d'un produit) comme la réponse (un prix) sont des symboles. Or, comme dans les tâches d'estimation classique, la distribution des prix donnés par les différents sujets suit ici une loi de variabilité scalaire : écart type et réponse moyenne sont proportionnels. De plus, le coefficient de variation (réponse moyenne de les réponses moyenne une distribution à variabilité scalaire, est le même dans tous les pays lorsque les réponses sont données dans la monnaie courante. Les variations de prix reflètent deux sources de variabilité : la variabilité des prix eux-mêmes, ainsi dans tous les pays les réponses sont plus dispersées pour les articles dont le prix est jugé variable. Cependant, même pour certains articles dont le prix est extrêmement fixe (un timbre, un paquet de cigarette par exemple), une variabilité entre les réponses

subsiste. Le coefficient de variation dans ce cas est de l'ordre de 0.15, une valeur proche du coefficient de variation dans la tâche de production de numérosité de Whalen et ses collègues, estimé à 0.19. Pour les réponses en euros, les prix donnés sont plus dispersés, et reflètent le sentiment de confusion des sujets.

Cet exemple pris de notre vie quotidienne nous permet d'illustrer l'idée clé qui distingue les tâches mettant en oeuvre notre représentation sémantique des quantités, et les tâches résolues de manière purement symbolique, sans faire appel à cette représentation sémantique. Les prix sont a priori des quantités précises, parfois au centime près. Pourtant, même lorsqu'il s'agit d'évaluer des prix qui ne sont pas variables sur le marché, les différents sujets produisent des estimations parfois différentes. D'autres auteurs reportent des observations similaires : par exemple, Dickson et Sawyer [Dickson and Sawyer, 1990] ont interrogé des consommateurs à la sortie de leur supermarché et observé que plus de la moitié d'entre eux n'était pas capables de donner le prix des articles qu'ils venaient d'acheter. Pire, certains d'entre eux donnent même des estimations au-delà ou en-deça de toute la gamme de prix de cet article.

Lorsqu'ils sont estimés sous une forme sémantique, les prix perdent donc leur caractère exact, ils deviennent approximatifs. A l'inverse, les bilingues même parfaits reportent d'énormes difficultés à donner leur numéro de téléphone dans une langue différente de celle du pays où ils habitent, suggérant que ces numéros ne seraient pas encodés sous une forme sémantique. Cette idée a été testée systématiquement par Spelke et Tsivkin [Spelke and Tsivkin, 2001]. Elles ont demandé à des bilingues parlant l'anglais et le russe de retenir des leçons fictives d'histoire et de géographie. Ces leçons étaient apprises dans une des deux langues seulement, puis les sujets étaient questionnés dans leurs deux langues. Lorsque les questions portaient sur des informations numériques, les temps de réponses étaient plus élevés si la langue d'apprentissage et la langue de la question étaient différentes. Par contre, pour des questions non numériques, les temps de réponse étaient équivalents dans les deux cas. Ce dernier résultat prouve que les informations numériques étaient retenues dans un format propre à la langue d'apprentissage.

Le même paradigme expérimental a été ensuite appliqué à des tâches d'additions exactes et approximatives. Les sujets sont entraînés à retenir le résultat exacte d'une addition à deux chiffres dans le premier cas, dans le deuxième cas il doivent seulement en connaître le résultat approximatif. Les résultats montrent un coût de changement de langue dans le cas des additions exactes, mais des temps de réactions équivalents dans les deux langues pour les additions approximatives. Lorsque nous devons retenir un résultat exact, celui-ci est codé dans un format verbal, dépendant de la langue d'apprentissage; par contre un résultat approximatif est codé dans un format non-verbal. Or, le système qui évalue des opérations sur des numérosités ne permet que d'obtenir des résultats approximatifs. Nous interpréterons donc les données d'apprentissage chez les bilingues en postulant que les résultats de calculs approximatifs ont été codés précisément sous la même forme que les calculs concrets de numérosité.

Données d'imagerie cérébrale Peut-on prouver l'existence de circuits dédiés à la résolution de tâches arithmétiques approximatives à l'aide de l'imagerie cérébrale? L'activité du cerveau a été enregistrée tandis que des sujets effectuaient des additions, tantôt approximatives et tantôt exactes [Dehaene et al., 1999].

Les mêmes problèmes étaient présentés dans les deux cas (additions d'opérandes à un chiffre), et le sujet devait choisir entre deux résultats proposés. Dans le cas de l'addition exacte, les deux propositions sont numériquement proches, et le sujet doit indiquer laquelle correspond exactement au résultat de l'opération. Dans le cas de l'addition approximative, la distance numérique entre les deux propositions est plus importante, et aucune ne correspond au résultat exact de l'addition : la tâche consiste à choisir celle qui s'en approche le plus. Lorsqu'on enregistre les potentiels évoqués par cette tâche, on détecte une déviation entre ces deux conditions avant même que les choix de réponse aient été présentés : dès que les sujets lisent l'énoncé de l'addition, tout en sachant le type de réponse qui leur est demandée (approximative ou exacte), ils s'engagent dans des traitements différents. Pour connaître la localisation anatomique des activations cérébrales, les mêmes auteurs ont étudié les tâches d'addition en utilisant l'Imagerie par Résonnance Magnétique (IRM). Les images révèlent des activations spécifiques à chaque condition : pour l'approximation, les lobes pariétaux sont largement activés, ainsi que le cervelet, et le cortex préfrontal précentral et dorsolatéral. A l'inverse, les activations dans la tâche de calcul exact sont principalement situées dans l'hémisphère gauche, au niveau du cortex préfrontal inférieur, et du gyrus angulaire². Cependant, les données plus récentes n'ont pas toutes répliqué cette dissociation : dans l'article de Molko et al [Molko et al., 2003], les différences entre addition exactes et approximatives ne sont retrouvées que si on se concentre sur les problèmes impliquant des petits nombres. Par ailleurs, Venkatraman, Ansari et Chee [Venkatraman et al., 2005] ne trouvent aucune différence entre des additions exactes et approximatives.

On retrouve cette dissociation entre opérations exactes et approximatives dans des tâches impliquant des calculs plus complexes [Yagoubi et al., 2003]. Là, les sujets devaient réaliser des opérations sur des nombres à deux chiffres et décider si le résultat était inférieur ou supérieur à 100. Les instructions ne précisaient pas si les opérations devaient être réalisées de manière approximative ou exacte, mais les problèmes étaient construits de telle façon que pour la moitié le résultat était très proche de 100, pour les autres il en était assez éloigné. Au niveau des potentiels évoqués, on observe une bifurcation entre problèmes dits exacts et approximatifs dès 200 ms après la présentation du deuxième opérande. L'échelle de temps est similaire à celle qui a été observée dans l'expérience précédente, et la topographie de l'effet, évoquant une activation pariétale, coïncide avec les premières données d'IRM. Ces résultats montrent que le calcul exact et l'estimation approximative appartiennent au répertoire stratégique spontané des sujets et sont mises en oeuvre en fonction de leur adéquation au problème posé.

²Peut-on dire que ces activations reflètent l'encodage des problèmes sous forme verbale? Cet aspect des données sera développé plus loin, dans le chapitre sur le rôle du langage dans la cognition numérique. Ici, notre dessein est simplement de noter l'importance des représentations sémantiques de quantité pour la résolution de tâches arithmétiques approximatives

²L'étude des patients cérébro-lésés a fourni et continue de fournir une base de données considérable pour la compréhension des fonctions cognitives. Dans le domaine des nombres, une littérature extensive a été consacrée à l'étude des transcodages entre les divers symboles numériques (chiffres arabes, nombres écrits, lus, nuages de points...). Afin de rester proche de l'objet de notre propos nous ne nous étendrons par sur le contenu de cette littérature. Cependant nous résumerons ici quelques cas éclairant la problématique du rapport entre le langage et la cognition numérique.

Données neuropsychologiques³ Avant toute chose, les données neuropsychologiques montrent une dissociation entre le système dédié au traitement des informations numériques et les autres systèmes sémantiques. Ainsi Thioux et ses collègues [Thioux et al., 1998] décrivent un patient atteint d'une anomie massive touchant diverses catégories de mots (animaux, plantes, objets, véhicules). Sur ces mêmes catégories, les auteurs identifient également des problèmes de compréhension. En revanche, le patient parvient à donner le nombre d'éléments sur une image, et réalise sans problème quelques manipulations simples sur des nombres, comme de citer son prédécesseur et son successeur. Quelques années plus tard, un deuxième patient présentant une dissociation similaire a été décrit [Butterworth et al., 2001, Cappelletti et al., 2001]. Inversement, Cipolotti, Butterworth et Denes [Cipolotti et al., 1991] ont rapporté le cas d'un patient qui était devenu totalement incapable de réaliser quelque tâche que ce soit sur des nombres, alors que son langage et ses capacités sémantiques étaient assez bien préservées. Les performances de ce dernier se détérioraient brutalement dès que les nombres considérés dépassaient 4. Depuis 1991, personne n'a plus décrit de cas semblable. D'autres observations rapportent néanmoins des déficits sémantiques spécifiques aux nombres, en général plus pointus et restreints à quelques tâches caractéristiques. Ces déficits seront discutés à la lumière de la dissociation entre tâches approximatives et tâches exactes introduite ci-dessus.

Les données d'imagerie rapportées au paragraphe précédent appuient la dissociation fonctionnelle entre tâches approximatives et exactes en leur attribuant des substrats cérébraux séparés. Si comme suggéré plus haut, les aires cérébrales activées jouent un rôle nécessaire et spécifique dans l'une ou l'autre de ces tâches, leur inactivation accidentelle devrait générer des symptômes caractéristiques. En particulier, on pourrait trouver des patients dont seul le code sémantique est encore valide. Ces patients seront une source de données précieuse quant aux limites des possibilités du système sémantique. Réciproquement, on pourrait trouver des patients qui ont perdu le code analogique des quantités. Quelles sont alors les tâches qui sont altérées dans l'une et l'autre de ces situations?

Citons d'abord le cas de M. Nau [Dehaene and Cohen, 1991]. A la suite d'une lésion massive de l'hémisphère gauche, celui-ci présente des déficits modérés du langage parlé, mais ne parvient plus à lire ni à écrire. Dans un test touchant diverses catégories de mots, les seuls qu'il soit presque parvenu à lire et à écrire sont des nombres : alors qu'il échoue sans appel pour écrire même des lettres sous la dictée, il parvient dans les mêmes conditions à écrire 7, 43, 198 et 1985 en réponse aux stimuli 7, 42, 193, et 1865. On voit que les nombres produits ne sont pas très distants des stimuli dictés. L'ensemble des performances de M. Nau se trouvent à l'image de cette dictée de nombres. Il ne réussit que des tâches approximatives : il parvient facilement à rejeter des résultats grossièrement faux pour une addition (par exemple 2+2=9) mais accepte ceux qui ne dévient que de quelques unités (2+2=5). Lorsqu'on lui demande de retenir une suite de chiffres, comme par exemple [6 7 9 8], il n'est plus capable au bout de quelques minutes de réciter la liste, ni de savoir si un nombre proche (5) s'y trouvait, mais lorsque le nombre présenté est assez éloigné de tous les éléments de la liste (2), il reconnaît que ce nombre n'en faisait pas partie. Les performances de M. Nau sont sensibles à la distance numérique entre les stimuli, comme si des stimuli trop proches étaient devenus indistingables. Les nombres ne sont plus précis pour lui comme ils le sont pour nous, chaque chiffre

évoque une impression floue de quantité. M. Nau est devenu un homme approximatif, et ses performances correspondent à celle d'un système analogique et flou de codage de la quantité. Depuis M. Nau, d'autres patients approximatifs ont été décrits dans la littérature, à la suite d'une lésion plus ou moins étendue de l'hémisphère gauche [Dehaene and Cohen, 1997, Grafman et al., 1989, Cohen et al., 1994, Warrington, 1982, Pesenti et al., 1994]. On retrouve le même type de performances après une lésion du corps calleux, lorsque les stimuli sont présentés à l'hémisphère droit [Gazzaniga and Hillyard, 1971, Gazzaniga and Smylie, 1984, Cohen and Dehaene, 1996, Seymour et al., 1994]. Chez ces patients, les deux hémisphères fonctionnent indépendamment, et les performances de l'hémisphère droit s'apparentent donc à celles d'un patient ayant perdu tout son hémisphère gauche.

Dans une étude récente, Lemer et ses collègues [Lemer et al., 2003] dressent une liste de tâches où les patients approximatifs présentent des déficits caractéristiques. Souffrant d'une dégénérescence frontale et temporale affectant particulièrement l'hémisphère gauche, leur patiente BRI présente des difficultés en arithmétique. Les tests révèlent que ces difficultés touchent principalement les multiplications et les divisions, les additions et les soustractions étant relativement épargnées. Les quelques erreurs que BRI commet sur des problèmes d'addition et de soustraction concernent les plus grands nombres, et sa réponse est toujours proche du résultat. Après ce tableau classique des différentes opérations arithmétiques, les auteurs soumettent BRI à d'autres tests issus de la littérature : un test d'additions exactes et approximative, dans lequel elle se montre très gênée par les problèmes exacts sur les grands nombres; un test de quantification de nuages de points, dans lequel elle ne présente pas de trouble particulier; enfin un test de comparaison et d'addition de nuages de points, où ses performances s'apparentent à celles des sujets contrôles (excepté un ralentissement général dû à ses troubles exécutifs). BRI est donc capable de résoudre des problèmes arithmétiques concrets et approximatifs, comme nous le faisons; elle parvient également à effectuer des tâches d'addition et de soustraction sur des stimuli symboliques, mais seulement de manière approximative. Par contre, BRI ne semble pas avoir accès aux quantités dans les multiplications et divisions.

Dans les cas ci-dessus, on voit apparaître un effet de distance même dans les tâches où les sujets sains n'en présentent pas. Tout se passe comme si ces patients se servaient systématiquement d'un code analogue de quantité pour résoudre les tâches numériques. Ce système se révèle en fait limité dans sa précision : des nombres très éloignés comme 4 et 9 sont distingués sans problème par M. Nau, tandis qu'il confond 4 et 5. BRI quant à elle, ne confond pas des nombres aussi petits. La précision des réponses est variable d'un patient à l'autre aussi on peut difficilement en inférer le degré de précision du système analogue de la quantité à l'état normal.

Inversement, on trouve des patients qui ont perdu tout sens de la quantité. C'est le cas par exemple de LEC, une patiente décrite dans le même article que BRI. Suite à une lésion focale dans le sillon intrapariétal gauche, LEC se plaint de difficultés en arithmétique. Dans un test classique de résolution d'opérations élémentaire, LEC montre des déficits touchant seulement la soustraction et la division. Les erreurs effectuées (par exemple 7-1=8, 9-1=9) montrent une compréhension limitée du concept de soustraction. Ses performances sont assez bonnes dans les tâches d'addition exacte et approximative, mais elle dit elle-même résoudre les deux

types de problèmes de la même façon, c'est-à-dire grâce à ses tables d'addition qui lui permettent de calculer le résultat exact de l'addition. Par contre les tâches impliquant des nuages de points révèlent l'étendue de ses déficits : lorsqu'on lui demande de comparer deux nuages de points, LEC répond complètement au hasard. De manière générale, la comparaison lui pose problème, puisqu'elle est même assez gênée pour comparer des nombres entre 20 et 100 écrits en chiffres arabes. D'autres patients présentant le même déficit sélectif de la soustraction que LEC avaient été décrit dans la littérature [Dagenbach and McCloskey, 1992]. C'est en particulier le cas de JG, examiné par Delazer et Benke [Delazer and Benke, 1997], qui est assez performant en multiplication (8% d'erreurs sur les faits élémentaires) mais semble incapable de comprendre la signification des nombres et des opérations effectuées. De même Dehaene et Cohen [Dehaene and Cohen, 1997] ont présenté le cas d'un patient MAR, qui savait multiplier mais ne réussissait pas à comparer, ni à approximer le résultat d'une opération, ni à trouver le milieu d'un segment numérique. Enfin, Delazer et al ont récemment présenté un patient avec des déficits évoquant ceux de LEC [Delazer et al., 2005] : ce patient présente un déficit en soustraction, alors que les multiplications et les additions sont préservées, et ses performances sont très faibles sur toutes les tâches requérant un traitement sémantique de la quantité (bissection d'intervalles numériques, approximation, estimation, placement des nombres sur une ligne physique).

Les deux types de patients illustrent la dissociation présentée entre tâches approximatives et exactes. Le cas des patients approximatifs comme M. Nau et BRI montre que le système analogique, s'il est seul, est vite limité dans sa précision. Le cas des patients ayant perdu l'intuition des quantités montre que le code analogique est indispensable à la bonne réalisation de tâches simples et purement symboliques comme la comparaison ou la soustraction. Plus généralement, l'arithmétique est une capacité composite, ou chaque opération est traitée différemment. On a vu qu'il n'était pas possible d'effectuer des soustractions lorsque le sens des quantités fait défaut; la multiplication et l'addition restent bien effectuées dans ce cas-là. En fait, les tables de multiplication et d'addition sont souvent apprises par coeur dès l'enfance : il y a fort à parier qu'un patient souffrant de déficit sémantique sur les nombres pourra encore se baser sur ces automatismes pour produire une réponse correcte. Par contre les tables de soustraction et de division ne font pas l'objet d'un apprentissage aussi poussé. Les calculs font appel à diverses stratégies (décomposition, renversement de problème...) qui exigent une compréhension du sens de ces diverses opérations, ainsi que des nombres mis en jeu.

RÉSUMÉ - Utilisation des représentations sémantiques de numérosité chez l'adulte

L'arithmétique n'est pas une capacité monolithique de l'esprit humain. Plusieurs systèmes cognitifs interagissent pour résoudre un problème, effectuer un calcul même simple. Au sein de ce réseau, nous identifions un système sémantique qui encode les quantités de manière analogique. Des tâches même purement symboliques comme la comparaison, l'estimation de prix, l'addition approximative de deux nombres, font appel à ce code sémantique. Les performances des sujets sont sensibles à la distance entre les nombres impliqués; il semble même à la lumière des observations neuropsychologiques que le système sémantique ne puisse donner que des résultats approximatifs. Ces caractéristiques rappellent celles des animaux sur des tâches analogues. Aussi nous expliquons ces données en postulant que le système sémantique de l'adulte coïncide avec le système hérité du monde animal de représentation des numérosités.

2.4 Synthèse : lois psychophysiques sur les numérosités

2.4.1 Loi de Weber ou Loi de Proportionalité

Nous avons exposé au cours des paragraphes précédents un ensemble de données qui exhibent un effet de distance sur les numérosités ainsi que les nombres symboliques (mots de la langue écrits ou oraux, chiffres arabes). Cet effet de distance a été interprété comme la signature d'une représentation analogique des quantités, utilisée pour résoudre en particulier les tâches de comparaison. En outre, on trouve aux côtés de l'effet de distance un effet de taille : à distance égale entre les nombres, les paires sont mieux discriminées si les nombres qui la composent sont petits. Ces deux effets ont été interprétés comme deux conséquences d'une seule et même loi, que nous appelerons ici la Loi de Proportionnalité. Cette loi stipule que le niveau de confusion entre deux nombres (numérosités), mesuré par exemple par le pourcentage de réponses correctes dans une tâche de comparaison entre ces deux nombres (numérosités), dépend uniquement du quotient entre les deux nombres. Plus ce quotient se rapproche de 1, plus les nombres sont confondus (c'est-à-dire que la performance dans notre tâche de comparaison chute).

La loi de Proportionnalité explique l'effet de distance : en effet, le quotient entre deux nombres se rapproche de 1 lorsque la distance qui les sépare diminue. Notons cependant que cette dernière remarque peut être infirmée lorsque la taille des nombres n'est pas contrôlée. Considérons par exemple les deux paires (10,15) et (30,40) : la distance entre les nombres est plus importante dans la deuxième paire (40-30>15-10) mais en même temps le quotient entre les nombres est plus proche de 1 $(1<\frac{40}{30}=\frac{4}{3}<\frac{15}{10}=\frac{3}{2})$. De même, la loi de proportionalité implique l'effet de taille : lorsque la distance entre deux nombres est fixe, leur quotient est d'autant plus proche de 1 que les nombres sont grands $(\frac{n+d}{n}\to 1$ si $n\to +\infty)$.

La Loi de Proportionalité est souvent appelée la loi de Weber, ce qui, sans démonstration préalable, est un abus de langage. La loi de Weber indique que la distance qui sépare un stimulus du plus proche stimulus dont il peut être distingué (souvent avec un taux de réussite de 75%) est proportionnelle à la valeur du stimulus de référence. Ci dessous, nous donnons et expliquons une formulation mathématique de ces deux propriétés.

Nous considérons une paire de stimuli de numérosité $(N, N*\alpha)$. La Loi de Proportionnalité nous dit que le taux de discrimination entre ces deux stimuli ne dépend pas de N, mais seulement de α . On pourra donc écrire : $p(N, N*\alpha) = p(\alpha)$. Ceci étant vrai pour toute valeur de α , la Loi de Proportionalité s'énonce :

$$\forall \alpha \in [1, \infty[, \exists p_0(\alpha) \in [0.5, 1] : \forall N, p(N, N * \alpha) = p_0(\alpha).$$

Quant à la loi de Weber, on part avec la donnée, non de α , mais d'un niveau de performance fixe (typiquement 75% de réponses correctes) à laquelle on souhaite se fixer. Pour un stimulus de numérosité N, ce niveau de performance p_0 est atteint lorsque on doit discriminer ce stimulus d'un autre, distant du premier; notons la numérosité de ce stimulus Nw. La valeur de w ici dépend du niveau de performance p_0 choisi; en notant $\alpha(p_0) = w$ on parvient à l'énoncé suivant (généralisation de la loi de Weber à tous les niveaux de performance p):

$$\forall p \in [0.5, 1[, \exists \alpha_0(p) \in [1, \infty[: \forall N, p(N, N * \alpha_0(p)) = p.$$

Sous l'hypothèse que $\alpha \mapsto (N, N\alpha)$ peut être prolongée en une fonction continue et décroissante de α , ces deux formulations sont en fait équivalentes. Pour une démonstration, nous renvoyons le lecteur au chapitre sur la modélisation mathématique de la ligne numérique interne (voir chapitre 4). Dans la suite du texte, nous nous référerons donc indifféremment à ces deux lois en parlant de Loi de Weber ou de comportement Weberien.

Vérifications expérimentales de la Loi de Proportionalité

Animaux Plusieurs expériences présentées ci-dessus reportent un effet de distance pour la numérosité chez les animaux : dans des tâches de comparaison simple [Brannon and Terrace, 1998, Brannon and Terrace, 2000, Hauser et al., 1996, Nieder and Miller, 2003], ou des tâches d'addition et de soustraction [Flombaum et al., 2005, Brannon et al., 2001].

Précisons la forme de cet effet de distance : le comportement est en fait Weberien. Ainsi, dans leur expérience de discrimination de syllabes, Hauser, Tsao, Garcia et Spelke montrent que deux numérosités sont discriminées si elles forment un ratio de 1.5 (paires (4,6) et (8,12)), mais pas si elles forment un ratio de 1.25 (paires 4,5) et (8,10). Dans l'analyse de leurs données comportementales, Nieder et Miller [Nieder and Miller, 2003] montrent clairement que le comportement des singes est Weberien. Dans cette tâche, les singes voient un premier nuage, qui sert de référence pour l'essai, suivi d'un second. Si la numérosité du second est différente de la référence, ils relâchent un levier qu'ils tiennent à la main depuis le début de l'essai. Si, au contraire, les deux nuages sont de même numérosité, le singe doit garder le levier à la main jusqu'à ce qu'apparaisse un troisième nuage, d'une autre numérosité. Grâce à ce paradigme, Nieder et Miller ont testé une large gamme de paires de numérosités. Pour chaque numérosité de référence (entre 2 et 6), ils calculent la numérosité du stimulus qui donne lieu à 75% de discrimination correcte. La valeur de ce stimulus est proportionnelle à celle de la référence, conformément à la loi de Weber. La propriété est même vérifiée à un niveau plus général. Les auteurs comparent le niveau de performance tracé dans un espace linéaire et dans un espace logarithmique (voir figure 2.6). Ils observent que le taux de réponse correct forme une courbe symétrique lorsqu'il est tracé en fonction du logarithme du nombre présenté. Dans cette espace logarithmique, les deux nombres situés de part et d'autre et à égale distance du nombre de référence sont reliés entre eux par la relation $\log(n_1) = \log(n) + \alpha$ et $\log(n_2) = \log(n) - \alpha$, soit $n_1 = n\alpha$ et $n_2 = \frac{n}{\alpha}$. Ces deux nombres diffèrent du nombre de référence par le même quotient α , et ils sont discriminés du nombre de référence avec le même niveau de performance : c'est la Loi de Weber.

On retrouve cette même loi de Weber dans les données de Brannon et al [Brannon et al., 2001] : ces auteurs testent plusieurs conditions de soustraction et observent que les courbes de réponses des pigeons sont superposables à une homothétie près : après 6 réponses sur le levier A (sur les 8 requises), ils donnent aux pigeons le choix entre continuer sur ce même levier ou utiliser le levier B où, invariablement, il faut

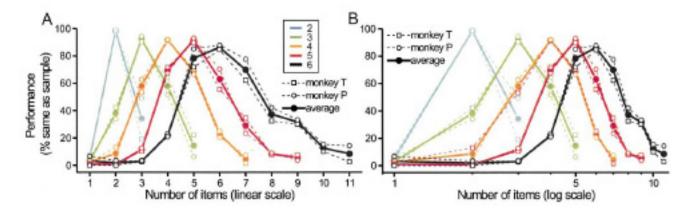


FIG. 2.6 – Performance de deux singes dans une tâche de détection de changement. Le graphique indique le pourcentage d'essais où le stimulus test (présenté après un délai) est jugé semblable au stimulus de référence. Selon la numérosité du stimulus de référence, les courbes sont tracées avec des couleurs différentes. Les réponses sont tracées sur un axe linéaire (A) et un axe logarithmique (B). Elles sont asymétriques sur une échelle linéaire (A), mais deviennent symétriques sur une échelle logarithmique (B) : le comportement est Weberien. Reproduit depuis [Nieder and Miller, 2003].

produire 4 réponses pour obtenir de la nourriture. Lorsque toutes les quantités du problème sont multipliées par un même terme (par exemple, levier A : 4 appuis sur les 6 requis, levier B : 3 appuis requis, ou levier A : 8/12, levier B :6), la proportion de choix entre les deux leviers reste la même (voir figure 2.7). Les auteurs testent sous cette forme plusieurs problèmes, et observent invariablement des résultats invariants par proportionnalité.

Enfin, on peut citer encore les données de bissection d'intervalle de Emmerton, Lohmann et Niemann. Dans cette expérience, des pigeons doivent catégoriser des images après avoir été entraînés à associer deux boutons de réponses respectivement aux petites et aux grandes quantités : 1 ou 2 éléments pour le bouton A, 6 ou 7 éléments pour le bouton 2. Quand les animaux sont testés sur d'autres numérosités, la proportion de réponses sur chaque levier varie continuement, et le point d'équivalence subjective (50% de réponses sur chaque levier) se trouve vers la moyenne géométrique de 1.5 et 6.5, les deux stimuli prototypiques. Or, la moyenne géométrique est en fait le point qui se trouve dans un rapport de quotient égal entre les deux nombres, c'est donc le point d'équivalence subjective prédit par la loi de Weber.

Bébés Les expériences sur les grandes numérosités montrent un effet de distance chez les bébés [Xu and Spelke, 2000, Lipton and Spelke, 2003, Xu et al., 2005]. En effet, à 6 mois, ceux-ci sont capables de distinguer deux numérosités lorsqu'elles sont éloignées (8 et 16) mais pas lorsqu'elles sont plus proches (8 et 12). Leurs capacités semblent liées au quotient entre les deux numérosités, puisque d'autres paires générées avec les mêmes rapports et des tailles de nombres différentes donnent lieu aux mêmes performances : 16 et 32 sont discriminées, mais les bébés réagissent indifféremment à 16 et 24. Plus tard, à 9 mois, le comportement reste Weberien mais la représentation de numérosité s'affine : aussi les bébés deviennent capables de distinguer des paires de numérosités formant entre elles un rapport de 1.5 (8 et 12), mais ils ne distinguent pas des numérosités dans un rapport de 1.25 (8 et 10).

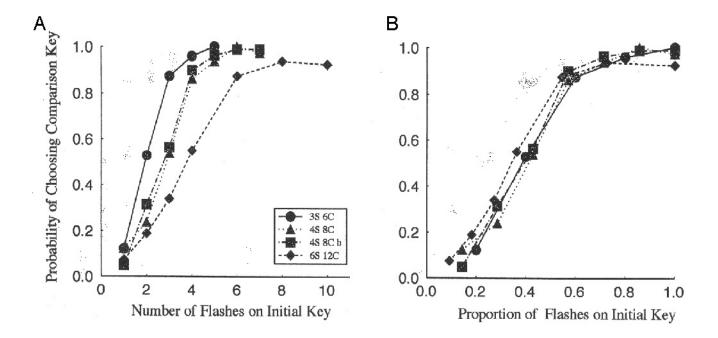


FIG. 2.7 – Performance des pigeons à la tâche de soustraction : après avoir produit un certain nombre d'appuis, les pigeons peuvent soit continuer sur cette même touche pour atteindre un certain nombre (N_1) , soit passer sur une autre touche sur laquelle ils doivent réaliser un nombre fixé d'appuis (N_2) . Le graphique montre le pourcentage d'essais où les pigeons ont choisi de rester sur la première touche, en fonction du nombre d'appuis déjà réalisés (A), ou de la proportion entre le nombre d'appuis déjà réalisés et le nombre d'appuis requis (B). Les différentes courbes correspondent aux différentes conditions expérimentales (par exemple, le code "4S 8C" signifie $N_1 = 8$ et $N_2 = 4$). En accord avec la loi de Weber, les courbes de réponses se superposent quand elles sont tracées en fonction de la proportion entre appuis réalisés et appuis requis. Reproduit depuis [Brannon et al., 2001].

Difficile, dans la littérature foisonnante en psychophysique de la numérosité, d'identifier la pre-Adultes mière découverte de l'effet de distance weberien. Citons par exemple Taves [Taves, 1941] qui mesure la distance d qui sépare un nuage de points de numérosité N d'un nuage de numérosité N+d, tel que ces deux derniers sont discriminés avec 75% de réponses correctes. Il trouve que d et N sont proportionnels, sans appuyer sur ce résultat ni même citer la loi de Weber. Ces résultats ont été contredits par la suite, par Newman [Newman, 1974], Burgess et Burlow [Burgess and Barlow, 1983], Krueger [Krueger, 1984], et Allik et Tuulmets [Allik and Tuulmets, 1991] qui trouvent tous que d ne représente pas un pourcentage fixe de N : au contraire $\frac{d}{N}$ diminue légèrement en fonction de N. Puis une nouvelle vague de résultats donne à nouveau d proportionnel à N : Allik et Tuulmets dans une variante de leurs expériences précédentes [Allik and Tuulmets, 1993] observent une tendance même inverse chez l'un de leurs observateurs, une proportionnalité stricte chez l'autre. Dans l'article de Barth, Kanwisher et Spelke [Barth et al., 2003], les performances des sujets dans une tâche de comparaison de numérosité intra- et inter-modalités sont strictement prédites par le quotient entre les deux numérosités à comparer. Dans ce dernier cas, ce pourrait être lié à l'intervalle de numérosités considérés, bien plus restreint que dans les expériences citées ci-dessus. Pour l'expérience de Allik et Tuulmets, il est difficile de trouver une explication claire, tant leur dessin expérimental ressemble à leur expérience précédente, où les résultats étaient opposés. Pour résumer l'ensemble de ces données, on peut dire que la loi de Weber est une bonne approximation des performances des sujets, au moins pour des intervalles de numérosité étroits, et dans une moindre mesure lorsque les numérosités présentées varient plus.

Comment quantifier l'effet de distance dans un comportement Weberien?

Nous avons parlé ci-dessus d'un coefficient de proportionnalité entre le stimulus de référence et un stimulus déviant discriminé avec une certaine probabilité du premier. Traditionnellement, on se place au niveau d'une perfomance de 75% de réponses correctes, ce coefficient de proportionnalité est appelé fraction de Weber. Dans la suite, nous parlons de fraction de Weber comportementale (notée WF) pour ne pas confondre ce paramètre avec un autre, la fraction de Weber interne (notée w) qui sera introduit plus tard (voir chapitre 4).

On trouve dans la littérature plusieurs variantes de la formule pour estimer la fraction de Weber :

- 1. $WF = \frac{N(75\%) N}{N}$: la plus simple, et aussi la plus usitée, où N(75%) est le stimulus donnant lieu à 75% de réponses "plus grand" quand il doit être comparé avec la référence [Taves, 1941, Newman, 1974, van Oeffelen and Vos, 1982, Allik and Tuulmets, 1991, Allik and Tuulmets, 1993].
- 2. $WF = \frac{N(75\%) N(25\%)}{2N}$: cette deuxième formule serait égale à la première si N(75%) et N(25%) se trouvaient à égale distance de N, ce qui n'est en général pas le cas puisque en vertu de la loi de Weber $\frac{N(75\%)}{N} = \frac{N}{N(25\%)}$. Toutefois elle reste une bonne approximation de la formule ci-dessus et est sûrement moins sujette au bruit des mesures [Emmerton et al., 1997, Nieder and Miller, 2003, Krueger, 1984].
- 3. $WF = \frac{1}{2}(\frac{N(75\%)-N}{N} + \frac{N-N(25\%)}{N(25\%)})$: cette formule corrige la première en prenant également en compte les stimuli plus petits que N [Nieder and Miller, 2003].

On trouvera dans le chapitre 4 une table récapitulant les valeurs de WF recueillies dans la littérature (voir table 4.1)

La fraction de Weber comportementale, chez les animaux, est de l'ordre de 0.3. Ainsi, Emmerton, Lohmann et Niemann [Emmerton et al., 1997] calculent la valeur 0.32 (formule 2). D'après le graphique de Brannon et al [Brannon et al., 2001], on obtient WF=0.34 (formule 2). Brannon et Terrace [Brannon and Terrace, 2000] fournissent leurs données à partir desquelles on peut calculer la fraction de Weber comportementale pour chaque animal (formule 1): on obtient 0.3 pour les deux premiers singes, par contre le troisième, dont la performance est bien plus mauvaise (peut-être parce qu'il avait été entraîné sur une variante de la tâche en premier lieu?), a une fraction de Weber comportementale de 2.0. Enfin, Nieder et Miller [Nieder and Miller, 2003] obtiennent une fraction de Weber comportementale de 0.35 (formule 3). Nieder et Miller ont également appliqué la formule de la fraction de Weber comportementale à leurs données électrophysiologiques, comme celles-ci présentaient les mêmes caractéristiques que les données comportementales. Ils calculent WF_{neuronale} pour deux périodes de temps séparées: la réponse au stimulus, puis le délai entre la présentation du stimulus et la réponse. Dans les deux cas, la fraction de Weber neuronale est de l'ordre de 0.2: le code neuronal semble donc plus précis que la réponse comportementale.

Chez l'humain, la représentation est plus précise, comprise généralement entre 0.15 et 0.2 (Taves [Taves, 1941]: WF=0.17-0.24 varie de manière non-monotone avec N=15-180; Newman [Newman, 1974]: WF=0.13-0.10 décroissante avec N=20-100; Van Oeffelen et Vos [van Oeffelen and Vos, 1982]: WF=0.162; Krueger [Krueger, 1984]: WF=0.13-0.0.81, décroissante avec N=25-400; Allik et Tuulmets (91) [Allik and Tuulmets, 1991]: WF=0.133-0.168 selon l'observateur et le nombre de référence; Allik et Tuulmets (93) [Allik and Tuulmets, 1993]: WF=0.16-0.18 selon l'observateur). Quant à Burgess et Barlow [Burgess and Barlow, 1983], le paramètre qu'ils calculent n'est pas directement comparable à la fraction de Weber, puisqu'il se réfèrent à un niveau de performance en termes de d', difficilement traductible dans un taux de réponse correcte comme ceux utilisés dans les autres articles cités. Cela dit, leur paramètre $\Delta N_T(0)$, qui s'apparente à une fraction de Weber comportementale à un facteur près, est une fonction de N qui décroit comme une fonction puissance ($\Delta N_T(0) = kN^{0.75}$).

Dans les résultats précédents, la numérosité des stimuli était toujours confondue avec un paramètre nonnumérique, par exemple, l'aire totale des points. Ce paramètre a pu fournir des informations supplémentaires au sujet pour prendre sa décision et donc la représentation de numérosité aura semblé plus précise qu'elle ne l'est en vérité. Dans une expérience de Barth et al [Barth et al., 2005], impliquant des opérations d'addition et de soustraction sur les numérosités, on obtient une WF de 0.29 (les calculs ont été effectués suivant notre modèle de représentation des numérosités sur une ligne interne (voir chapitre 4)). En utilisant les premières données de Barth, Kanwisher et Spelke [Barth et al., 2003], on obtient des valeurs plus proches des observations précédentes (expérience 4 : WF=0.21 pour comparer des stimuli dans des modalités différentes, WF=0.17 pour des stimuli dans la même modalité).

2.4.2 Variabilité scalaire

Au cours de l'exposé précédent, nous avons mis l'accent également sur des régularités dans des tâches d'estimation ou de production de numérosité. Nous avons parlé à cette occasion de "variabilité scalaire". La définition de cette propriété est très simple : elle est vérifiée lorsque l'écart type des réponses varie en fonction du nombre (ou de la numérosité) présenté en tant que stimulus, en restant proportionnelle à la numérosité (ou au nombre) produit.

Animaux

Les données connues de production de numérosité par des animaux ont été enregistrée à la fin des années 50 par Mechner [Mechner, 1958, Mechner and Guevrekian, 1962], et dans les années 70 par Platt et Johnson [Platt and Johnson, 1971]. Les auteurs ne parlent pas de variabilité scalaire, et n'analysent pas la variance des réponses, mais une partie des données de Platt et Johnson a été reprise par Whalen, Gallistel et Gelman [Whalen et al., 1999], qui calculent le coefficient de variation (écart type des réponses pour différentes valeur de N, le nombre d'appuis requis, et montrent que celui-ci reste constant. Sa valeur exacte n'est pas donné mais le graphique le situe vers 0.4 (voir figure 2.1).

Enfants

Bien sûr il n'est pas question d'exiger d'un bébé d'estimer une quantité ou de produire une numérosité. Les premières données ont été acquises par Huntley-Fenner [Huntley-Fenner, 2001] chez des enfants de 5 à 7 ans. Ceux-ci devaient estimer la quantité de points dans des nuages présentés très brièvement, en montrant le chiffre correspondant sur une règle graduée. Les réponses des enfants de cet âge suivent une loi de variabilité scalaire. Le coefficient de variation, stable pour chaque enfant, est compris entre 0.11 et 0.37 (en moyenne 0.23), et décroît avec l'âge. Lorsqu'ils grandissent, les enfants sont donc de plus en plus précis, leurs réponses sont de moins en moins dispersées, soit que leur représentation de la numérosité soit elle-même plus précise, soit que le processus qui traduit une numérosité codée analogiquement en une étiquette verbale ait gagné en précision lui aussi.

Adultes

Whalen, Gallistel et Gelman [Whalen et al., 1999], puis Cordes et al [Cordes et al., 2001b] se sont intéressés à une tâche de production, ou les sujets doivent reproduire un nombre en tapant très rapidement sur un bouton. Selon les versions, les nombres sont présentés soit en chiffres arabes, soit sous la forme d'une succession de flashes. Dans les conditions où le comptage des appuis est impossible, les réponses suivent une loi de variabilité scalaire (voir figure 2.4); selon les sujets, le coefficient de variation est compris entre entre 0.15 et 0.35.

Whalen, Gallistel et Gelman présentent également une tâche d'estimation. Les stimuli sont présentés sous forme d'une séquences de flashes lumineux, et les sujets doivent, sans utiliser le comptage, reporter le nombre

de flashes. Dans cette tâche, les auteurs parviennent à exclure la possibilité que les sujets se soient servi de la durée de la séquence pour répondre ; cependant, ils peinent à rejeter l'hypothèse que les sujets n'aient pas compté. Leur argument repose sur la fréquence de présentation des flashes, beaucoup trop rapide par rapport au temps nécessaire aux sujets pour compter mentalement, qui a été mesuré préalablement. Cependant il reste possible que les sujets aient compté les flashes 2 par 2, ou 3 par 3 ; il est possible également qu'ils aient placé la séquence en mémoire échoïque pour la rejouer mentalement ensuite, mais plus lentement. Malgré ces réserves, Whalen et ses collègues observent aussi une variabilité scalaire dans cette condition d'estimation de flashes lumineux, les coefficients de variations sont moins élevés (entre 0.10 et 0.25), et cela pourrait être lié à l'utilisation partielle d'une stratégie de comptage précise.

Enfin, il faut citer les données de Dehaene et Marques [Dehaene and Marques, 2002], qui, bien qu'elles portent sur des stimuli purement symboliques, suivent elles aussi une loi de variabilité scalaire. Les sujets estiment le prix d'articles familiers, dans leur monnaie courante et en euros. Le coefficient de variation est différent selon les articles, mais diffère selon que les prix pour ces articles sont jugés plus ou moins variables. Ce coefficient de variation reflèterait donc à la fois une variabilité objective du prix, et une variabilité interne aux observateurs. Lorsque le prix de l'article est jugé particulièrement fixe (par exemple pour des timbres), les auteurs enregistrent un coefficient de variation de 0.15. On peut considérer que la variabilité interne des observateurs était la seule source de variance dans ces réponses.

Nous observons donc une grande cohérence entre les valeurs estimées dans la littérature : le coefficient de variation est de 0.4 chez l'animal; chez l'enfant il diminue progressivement et vaut 0.2 à l'âge de 6 ans; enfin chez l'adulte le coefficient de variation est compris entre 0.1 et 0.3. Ces valeurs ressemblent assez à celles de la fraction de Weber citées ci-dessus, bien qu'elles soient en général un peu moins élevées. Nous verrons plus loin, dans le chapitre modélisation, comment, sous certaines hypothèses, ces valeurs peuvent être liées à la fraction de Weber.

Chapitre 3

Le modèle de la ligne numérique interne

3.1 Introduction

3.1.1 La ligne numérique en tant que simple métaphore

Nous avons recensé dans le chapitre précédent un ensemble de données indiquant qu'il existe des représentations analogiques de la numérosité. Par analogique, nous signifions que les codes se ressemblent d'autant plus que les nombres sont proches. C'est ainsi qu'on explique l'effet de distance : comme les codes se ressemblent, deux nombres proches ont plus de chance d'être confondus (effet de distance sur les performances), leur séparation demande plus d'effort (effet de distance sur les temps de réaction).

Les premiers modèles d'encodage de la quantité numérique dérivent directement du modèle de l'accumulateur, introduit pour représenter la durée [Gibbon, 1977]. Dans ce modèle, une horloge interne émet des impulsions électriques à intervalles réguliers. Ces impulsions peuvent être accumulées dans un accumulateur, relié à l'horloge interne via un interrupteur. Pour donner une image concrète de ce modèle, on peut représenter l'horloge interne comme un robinet qui fuit, l'accumulateur serait un récipient gradué que l'on peut placer sous ce robinet, selon la position de l'interrupteur. Lorsqu'une durée doit être évaluée, l'interrupteur est placé en position fermée au moment où commence le stimulus, et les impulsions commencent à s'accumuler dans l'accumulateur. A la fin du stimulus, l'interrupteur est ouvert et le niveau de remplissage de l'accumulateur représente la durée du stimulus. Pour représenter des numérosités à l'aide du même système, il suffit de changer le mode d'ouverture et de fermeture de l'interrupteur [Church and Meck, 1984] : celui-ci s'ouvrirait au moment où chaque élément apparaît, puis se refermerait presque aussitôt. Dans ces conditions, le niveau de remplissage de l'accumulateur à la fin du décompte correspond au nombre d'éléments comptabilisés. Pourquoi expliquer la représentation de la quantité et de la durée par des mécanismes hautement semblables? Meck et Church étaient en fait convaincus que ces deux attributs sont représentés sous le même format, ayant observé que les fonctions de réponses pour la durée et la numérosité sont d'une part superposables [Meck and Church, 1984], d'autre part sont affectées de la même façon par différentes substances pharmacologiques [Meck and Church, 1983]. L'idée d'un format commun pour les nombres et la durée suscite un regain d'intérêt aujourd'hui [Walsh, 2003].

L'intérêt du modèle de Meck et Church pour la discussion présente se trouve au niveau de l'accumulateur lui-même, qui établit une correspondance entre les numérosités et une grandeur interne. Les valeurs que peut prendre cette grandeur interne ne sont pas discrètes, contrairement à ce que pourrait laisser penser la description du modèle ci-dessus, car il faut aussi prendre en compte le bruit interne au système. Au contraire, la "magnitude interne" peut prendre toutes les valeurs de façon continue. S'affranchissant du mécanisme exact d'accumulation postulé par Meck et Church, les modèles plus récents de la numérosité le réduisent au concept fondamental de ligne numérique interne [Gallistel and Gelman, 2000, Dehaene, 2003]. Selon ces deux modèles, les nombres (et les numérosités) sont représentés sur une ligne mentale; selon Gallistel, ces représentations prennent la forme d'une magnitude interne.

A vrai dire, le modèle de la ligne interne résume les propriétés de la représentation analogue des quantités numériques que nous avons étudiée au chapitre précédent, sans apporter nécessairement de nouvelles hypothèses. Pour chaque nombre, le code analogique est défini par la valeur numérique qu'il représente. Il y a donc une relation biunivoque entre les codes pour les nombres, et l'espace des quantités numériques, qui, en prenant en compte le fait que ces quantités soient floues, est lui-même analogue à la droite des réels \mathbb{R} . La métaphore de la ligne numérique, telle que nous venons de l'introduire, ne traduit rien de plus que l'ordre et les relations de proximité entre les numérosités.

La méthode de "scaling multidimensionnel" utilisée par Shepard [Shepard et al., 1975] nous donne une bonne illustration de l'idée précédente. Shepard demande à ses sujets de juger la ressemblance entre des paires de stimuli numériques, présentés sous divers formats (chiffres arabes, romains, mots écrits, lus, doigts levés, polygones, marques, faces de dé, rangées de points). Les paires de stimuli sont d'abord notées pour la ressemblance physique, puis les sujets doivent jusger de la ressemblance entre les deux nombres qu'ils représentent, en tant que concepts abstraits. Shepard soumet ensuite les réponses des sujets à sa méthode du scaling multidimensionnel, qui place ses stimuli dans un espace à 1 ou 2 dimensions, construit de telle sorte que la proximité géométrique entre les points de l'espace corrèle avec le niveau de similarité jugé par les sujets. Pour tous les stimuli de type analogique (doigts levés, polygones, marques, faces de dé, rangées de points), l'espace perceptif ainsi révélé est organisé autour de la numérosité : on peut en effet identifier une direction suivant laquelle les stimuli sont ordonnés par numérosité croissante. Dans le cas des rangées de points, l'espace perceptif est unidimensionnel, c'est-à-dire que le seul paramètre qui a influencé les jugements se trouve être la numérosité elle-même. Lorsque les sujets doivent juger de la similarité des deux nombres en tant que concepts abstraits, une organisation autour de la quantité numérique émerge de la même façon, conjuguée avec d'autres paramètres tels que la parité, la primauté... De manière intéressante, lorsque l'espace est unidimensionnel, les nombres ne sont pas distribués régulièrement le long de cette droite, mais se trouvent de plus en plus ressérés à mesure que les nombres croissent. Cette répartition nous rappelle la loi de Weber, selon laquelle les différences entre les nombres sont liés aux quotients : les petits nombres sont séparés par des rapports plus importants que les grands nombres.

Dans ces analyses, la structure spatiale ne possède pas de pouvoir prédictif au-delà du fait qu'elle permet de rendre compte des proximités perçues entre les nombres. La ligne numérique n'est ici qu'une propriété 3.1. INTRODUCTION 67

émergente de l'analyse.

Cohérence avec le code neuronal

Peut-on proposer un mécanisme qui extrait une grandeur interne à partir du code neuronal identifié chez l'animal [Nieder et al., 2002, Sawamura et al., 2002]? Les neurones enregistrés déchargent en fonction de la distance qui sépare leur numérosité préférée du stimulus présenté. Le problème que nous nous posons consiste en fait à décoder une population de neurones [Dayan and Abbott, 2001] : toute une assemblée code de façon redondante pour le même stimulus, et il s'agit de retrouver, à partir du taux de décharge des neurones, la valeur du stimulus qui a été présentée. Une méthode raisonnable consiste à estimer le stimulus le plus vraisemblable, étant donné le taux de décharge des neurones : c'est la méthode dite du maximum à postériori. On suppose connues les probabilités conditionnelles de décharge des neurones, c'est-à-dire qu'on peut décrire leur comportement face à n'importe quelle valeur de stimulus. Par exemple, pour le cas qui nous intéresse, les probabilités conditionnelles de décharge sont données par les courbes d'accord des neurones : comment chaque neurone décharge quand on lui présente 1, 2, 3, 4, 5,..., n points. Un stimulus est présenté : les k neurones observés se mettent à décharger, et leurs taux de décharge sont stockés dans une variable $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3, ..., x_k)$. La méthode du maximum à postériori cherche alors la valeur n du stimulus qui maximise p $\binom{n}{X}$.

Si toutes les valeurs de n sont équiprobables (ce qui est en général le cas dans les expériences de psychologie), alors on peut simplifier la méthode en utilisant la formule de Bayes $(p\left(n|\overrightarrow{X}\right) = \frac{p\left(\overrightarrow{X}|n\right)p(n)}{p\left(\overrightarrow{X}\right)})$. Alors, la recherche du maximum à postériori consiste à maximiser le terme de droite, où $p\left(\overrightarrow{X}\right)$ est indépendant de n, ainsi que p(n) sous l'hypothèse de l'équiprobabilité. L'opération précédente revient donc à maximiser $p\left(\overrightarrow{X}|n\right)$ par rapport à n. Cette méthode consistant à maximiser $p\left(\overrightarrow{X}|n\right)$, dite méthode du maximum de vraisemblance, est plus couramment utilisée, étant plus facile à implémenter que la précédente.

On peut montrer facilement que le maximum de vraisemblance existe toujours¹. La méthode décrite ci-dessus donne donc un cadre technique pour extraire une valeur réelle, proche de la valeur numérique du stimulus, à partir d'une population de neurones accordés chacun sur une numérosité donnée. Nous ne disons pas qu'il s'agit effectivement de l'algorithme implémenté par le cerveau pour décider la valeur du stimulus; il existe en effet un grand nombre d'algorithmes possibles. Le but du présent paragraphe était de discuter la cohérence entre le modèle de la ligne numérique interne et le code neuronal : et nous montrons effectivement qu'une quantité à valeur dans un espace unidimensionnel (c'est-à-dire une ligne) peut être extraite du code neuronal pour les nombres et qu'il est donc plausible qu'une valeur de ce style nourrisse les processus de prise de décision.

¹Existence nécessaire du maximum à postériori : Le maximum à postériori est la valeur de n maximisant : $p\left(n|\overrightarrow{X}\right)$. Or nous savons que $\sum_{n} p\left(n|\overrightarrow{X}\right) = 1$. Par conséquent, la suite $p\left(n|\overrightarrow{X}\right)$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. L'ensemble $\{p\left(n|\overrightarrow{X}\right)\}_n \cup \{0\}$ est donc fermé, et borné, il contient donc son maximum p_0 . Il existe donc une valeur de n telle que $p\left(n|\overrightarrow{X}\right) = p_0$, cette valeur correspond au maximum à postériori.

3.1.2 Jusqu'où croire à la métaphore de la ligne numérique?

Jusqu'ici, nous avons présenté la métaphore de la ligne numérique comme une forme simplement adaptée pour capturer les propriétés des représentations analogiques, un outil pratique pour raisonner sur ces représentations et dériver des prédictions. Curieusement, un certain nombre de résultats en psychologie suggèrent que la métaphore de la ligne numérique peut être poussée plus loin. On observe en effet un certain nombre d'interférences troublantes entre le traitement des nombres et de l'espace [Hubbard et al., 2005].

Certaines personnes développent des associations explicites entre les nombres et l'espace. Les nombres leur apparaissent sur une ligne, une courbe, dans un tableau, ou suivant une forme tridimensionnelle complexe [Seron et al., 1992]. La forme de cette ligne numérique est fixe pour chaque personne, et souvent elle apparaît automatiquement dès que la personne manipule des nombres. Ce phénomène curieux porte le nom de synesthèsie, il reste assez rare, avec une fréquence d'occurence qui varie entre 1/20 [Galton, 1880] et 1/20000 [Cytowik, 2002] selon les estimations - un chiffre à revoir à la baisse car il regroupe la synesthésie numérique-spatiale qui nous intéresse avec d'autres formes de synesthésie, dont la plus courante qui relie les lettres aux couleurs. Les synesthètes sont-ils fondamentalement différents de la grande majorité de la population? Ou existe-t-il tout un continuum entre des personnes, chez qui le lien entre nombres et espace serait particulièrement fort, et d'autres, chez qui on pourrait mettre en évidence quelques associations inconscientes?

Chez les sujets normaux, un certain nombre d'interférences nombres-espace ont été répertoriées. En tout premier lieu, nous citerons l'effet 'SNARC' (Spatial Numerical Association of Response Codes), selon lequel les petits nombres sont inconsciemment associés au côté gauche du corps, et les grands au côté droit [Dehaene et al., 1993]. Dans une tâche de jugement de parité, impliquant les chiffres entre 1 et 9, on observe ainsi que les sujets répondent plus vite pour les chiffres de 1 à 4 lorsqu'ils utilisent le bouton de gauche, alors que pour les nombres de 6 à 9 ils sont plus rapide avec le bouton de droite. Tout se passe comme si les chiffres étaient automatiquement catégorisés en 'petits' et 'grands', bien que la tâche (jugement de parité) ne fasse pas appel à cette notion de quantité; les chiffres petits sont associés à la gauche, les chiffres grands à la droite. Plus précisément, cette classification des chiffres est sujette à un effet de distance : plus les chiffres sont petits et plus le côté gauche est favorisé, et réciproquement pour les chiffres très grands. La métaphore de la ligne numérique capte de manière remarquablement simple ce phénomène : les nombres seraient représentés sur une ligne, orientée de gauche à droite, et l'activation (automatique) des quantités numériques amorcerait l'activation de différentes parties de l'espace, suivant la disposition des nombres sur la ligne. Lorsque la réponse qui doit être produite consiste à sélectionner le bouton du même côté que la position amorcée, cette réponse préactivée intervient plus précocément que la réponse inverse.

Dans le SNARC, c'est un espace indépendant du corps du sujet qui est préactivé : lorsque celui-ci croise ses mains, les petits nombres favorisent toujours la réponse située à sa gauche [Dehaene et al., 1993]. Ici, les observations réalisées sur les sujets "normaux" rejoignent l'expérience des synesthètes, qui reportent pouvoir déplacer leur attention sur leur ligne numérique mentale ; certains même visualisent leur propre corps disposé

3.1. INTRODUCTION 69

sur la ligne. La ligne des synesthètes, comme celle des sujets normaux, est un objet externe au corps, dont l'orientation et la position sont indépendantes de la disposition du corps. Dans le cas des sujets normaux, l'orientation de cette ligne est sensible aux influences culturelles : les sujets Iraniens, habitués à écrire de droite à gauche, ont un effet SNARC inversé par rapport aux Occidentaux. La ligne numérique mentale pourrait être la cristallisation d'un objet culturel, les axes horizontaux que l'on trace pour y ordonner des nombres. Chez les synesthètes, par contre, l'orientation de la ligne semble indépendante de ces habitudes culturelles.

Depuis sa découverte il y a une dizaine d'années, l'effet SNARC a été maintes fois répliqué et des variantes expérimentales ont largement exploré son domaine d'application. En particulier, l'effet ne semble pas propre à l'effecteur de la réponse, puisqu'on l'observe non seulement avec des réponses manuelles comme ci-dessus, mais aussi lorsque les sujets doivent effectuer des saccades occulaires à droite et à gauche pour répondre [Schwartz and Keus, 2004], pointer vers la réponse correcte [Fisher, 2003], ou indiquer leur réponse en ajustant l'écartement de leurs doigts [Andres et al., 2004].

Afin d'éclaircir le mécanisme mis en jeu, Fisher et al [Fisher et al., 2003] ont étudié une tâche très simple de détection de cible. Les cibles, des carrés lumineux, pouvaient apparaître en deux endroits, situés à droite et à gauche du point de fixation. Juste avant l'apparition de ces cibles, un chiffre apparaissait au centre de l'écran. La valeur de ce chiffre n'avait aucun rapport avec la position de la cible à détecter, ce dont les sujets étaient informés. En accord avec l'effet SNARC, les sujets répondent plus rapidement lorsque la cible apparaît à gauche si le nombre est petit, et réciproquement lorsque la cible est à droite si le nombre est grand. Contrairement aux expériences de SNARC classique, ici la réponse est toujours effectuée du même côté, avec la même main, et les résultats ne peuvent pas être expliqués par un biais dans la sélection du côté de la réponse. La présentation d'un chiffre induit ici un biais attentionnel qui se situe en amont de l'étape de prise de décision. Dans le cadre du modèle de la ligne numérique, on dira que le nombre présenté active un point sur la ligne numérique, et attire l'attention du sujet sur cette position. Lorsque la cible apparaît, son traitement est accéléré si l'attention du sujet était dirigée sur ce même endroit.

La démonstration probablement la plus éloquente d'une identité de traitement entre les nombres et l'espace a été celle de Zorzi, Priftis et Umilta [Zorzi et al., 2002]. Cette étude confronte des patients héminégligents à une tâche de bisection numérique. Les patients héminégligents souffrent d'un déficit pour orienter leur attention vers la partie de l'espace se situant à leur gauche. Dans la vie quotidienne, ce déficit induit des comportements suprenants, les patients ne se rasent que d'un côté, oublient de manger la moitié de leur assiette, et ignorent les personnes situées à leur gauche. Un des tests classiques pour formuler un diagnostique d'héminégligence consiste à demander au patient de marquer le milieu sur des segments : typiquement, les patients héminégligents indiquent un point situé bien à droite du milieu. Dans la tâche de bisection numérique, ils se comportent exactement de la même façon : au lieu du milieu du segment numérique, ils donnent un nombre beaucoup trop grand (par exemple, pour l'intervalle 11-19, un patient répond 17). Fait remarquable, la déviation entre leur réponse et la réponse correcte varie de la même façon que pour une bisection de segments physiques : plus l'intervalle est large, plus les nombres produits sont trop grands. Par contre,

lorsque l'intervalle est petit (11-13) les réponses sont déviées vers les petits nombres pour la plupart des patients, de la même façon que dans la tâche de bisection de segments, ces patients situent le milieu trop à gauche quand les segments sont courts. Mise à part la bisection numérique, ces patients ne présentent aucun trouble dans le domaine des nombres. Ces données prouvent donc qu'un même mécanisme dédié originellement à l'orientation de l'attention dans l'espace, est recruté pour résoudre la tâche de bisection numérique. Pour reprendre la formulation des auteurs, la ligne numérique est fonctionnellement isomorphe à une ligne physique.

Pour aller plus loin sur ce même thème, l'équipe de Rossetti [Rossetti et al., 2004] a montré que des séances de rééducation prismatique, dont on sait qu'elles corrigent le déficit des patients par rapport à l'espace, améliorent également leurs performances sur la tâche de bisection numérique. Chez des sujets normaux même, quelques minutes d'adaptation aux prismes suffisent à dévier vers la gauche le pointage vers des cibles, ainsi que les réponses des sujets dans la tâche de bisection numérique.

3.1.3 Pourquoi la métaphore de la ligne numérique possède-t-elle un si fort pouvoir prédictif?

Ainsi donc, la ligne numérique, un concept que nous avons introduit comme outil, parce qu'il nous était commode pour résumer quelques propriétés d'une représentation non-verbale des nombres, s'avère un modèle explicatif pour un certain nombre de phénomènes assimilant le traitement des nombres à celui de l'espace. S'agit-il d'une pure coïncidence, où la communauté scientifique aurait utilisé une image dont, par hasard, plusieurs caractéristiques considérées comme mineures au moment de son introduction, se sont révélées importantes après tout? Ou était-il logique que toutes ces propriétés de la ligne numériques soient reflétées par des comportements?

Mathématicalement, dire qu'un ensemble (un système de représentations) est unidimensionnel, continu et ordonné ou qu'il est isomorphe à une ligne orientée sont deux propriétés strictement équivalentes. En incarnant notre ensemble dans l'espace, en lui donnant la forme d'une droite, nous ne lui donnons aucune propriété supplémentaire qui n'aurait pû être dérivée des deux prémisses d'unidimensionnalité et de continuité. Si on considère les neurones qui représentent les quantités numériques d'une part, ceux qui représentent l'espace d'autre part, il y a donc de fortes chances que les codes de ces deux populations soient équivalents : que l'on puisse imaginer des mécanismes pour traduire l'un des deux codes en l'autre et réciproquement. On propose deux implémentations de cette équivalence ci-dessous. Avant de les détailler, notons tout de même que la forme particulière de l'orientation de la ligne numérique, telle que la décrivent les expériences précédentes, c'est-à-dire une ligne positionnée horizontalement et orientée de la gauche de la droite, n'est pas une conséquence logique des propriétés de continuité, d'unidimensionalité et d'ordonnement. Ces trois propriétés décrivent certes une ligne orientée, mais la position et le choix de l'orientation, sont, à priori, arbitraires. Pour expliquer cette régularité, on devra invoquer une influence extérieure, probablement des habitudes culturelles qui recommandent de tracer des axes gradués toujours de la même manière.

Comment se matérialisent deux codes équivalents dans le cerveau? Première possibilité : il se peut

que les mêmes neurones interviennent dans les deux types de représentations. Les réseaux de neurones forment des systèmes dynamiques, dont les caractéristiques sont déterminées par les propriétés du câblage entre les neurones (longueur des axones et des dendrites, myélinisation, densité des synapses, propriétés électriques de chaque cellule...). Dans le cas des nombres et de l'espace, deux codes que nous supposons fonctionnellement équivalents, les mêmes neurones seraient adaptés pour représenter les deux. Ce recrutement des mêmes neurones expliquerait les interférences que l'on observe. Ainsi, Pinel et al [Pinel et al., 2004] ont reporté des activations partiellement superposées pour deux tâches numérique (la comparaison numérique) et spatiale (la comparaison de taille physique). Ces données suggèrent que les populations responsables de l'encodage des nombres et de l'espace se recoupent partiellement. Il existerait simultanément des neurones codant exclusivement pour la quantité numérique, d'autres exclusivement pour l'espace, et enfin d'autres interviendraient dans les deux types de codage.

Mais que dire alors des neurones qui interviennent à la fois dans le codage des nombres et de l'espace? Dira-t-on qu'ils représentent les nombres, l'espace, selon l'assemblée dans laquelle ils sont engagés à un instant donné? Ou codent-ils pour une propriété abstraite plus générale, commune entre nombres et espace?

Nous proposons une deuxième alternative pour expliquer les interférences entre informations numériques et spatiales, sans que les mêmes neurones ne soient recrutés pour représenter ce deux types d'informations. Si les codes de l'espace et des nombres sont implémentés dans deux assemblées distinctes, mais aux propriétés fonctionnelles équivalentes, alors il est envisageable que les mêmes mécanismes de décodage s'appliquent également aux deux types de populations neuronales, et que des sensations de position spatiale émergent de cette étape de décodage. Dans cette perspective, la notion de carte neuronale pourrait être cruciale : comme les neurones spatiaux forment une carte de l'espace, peut-être les neurones numériques, si on reporte leurs numérosités préférées, forment une carte des quantités. Dans la mesure où la position respective des neurones conditionne aussi leurs connexions, et donc leur statut dans le système dynamique que constitue une assemblée neuronale, la notion de carte neuronale peut jouer un rôle pour le mécanisme décodeur, mécanisme commun à l'espace et aux nombres.

3.2 Échelle interne de la ligne numérique

Mise à part son orientation, nous n'avons pas abordé jusqu'ici le problème de la forme de la ligne numérique. Les nombres sont-ils perçus avec un espacement régulier (échelle interne linéaire) ou suivent-ils une configuration spéciale (impliquant par exemple que l'échelle interne soit compressée pour les grands nombres)?

3.2.1 Fechner et les partisans de l'échelle logarithmique

Fechner aborde un problème beaucoup plus large que celui qui nous préoccupe à priori, puisque c'est la forme d'une échelle interne générale qu'il cherche à découvrir. De la loi de Weber, à laquelle il adjoint une hypothèse supplémentaire selon laquelle la distance séparant deux stimuli au seuil de discriminabilité est

constante sur la ligne interne, il parvient à dériver son hypothèse d'une échelle interne logarithmique (voir figure 3.1 C).

Fechner part de la loi de Weber sous sa forme originelle, reliant le seuil de discriminabilité avec la valeur d'un stimulus. Notons N la valeur de ce stimulus, $\triangle N$ le seuil de discriminabilité de N (défini en général par le fait que N et $N + \triangle N$ sont discriminés avec une performance de 75% de réponses correctes). Selon la loi de Weber sous forme originelle, ces deux valeurs sont proportionnelles : $\triangle N = kN$. Le coefficient de proportionnalité k est appelé la fraction de Weber.

A la loi de Weber, Fechner adjoint l'hypothèse suivante : sur la ligne interne, la distance entre deux stimuli au seuil de discriminabilité, $\triangle Q(N)$ est constante quelle que soit la valeur de $N:\triangle Q(N)=c$. Il s'agit bien d'une hypothèse et non d'une propriété nécessaire. Fechner postule que deux stimuli deviennent difficiles à discriminer lorsqu'ils sont trop proches sur la ligne. Mais on pourrait imaginer des scénarios alternatifs pour expliquer que deux stimuli soient juste discriminables. Imaginons par exemple que les perceptions soient plus bruitées lorsque la valeur des stimuli augmente : pour séparer deux stimuli, il faudra que ceux-ci soient plus distants lorsque les nombres présentés sont plus élevés.

Nous détaillons ci-dessous la démonstration de Fechner (plus précisément une version remaniée par Wundt et Koehler [Krueger, 1989]). Comme Fechner considérait non pas précisément la numérosité, mais l'ensemble des continua perceptifs, sa démonstration est basée sur des stimuli à valeurs continues. Pour l'exposer, il nous faut donc considérer des numérosités continues. Cela pourrait choquer le lecteur à premier abord; mais il suffit de penser que nous nous intéressons à une extension continue de la numérosité. A vrai dire, il y a fort à penser que la ligne numérique interne est continue (sauf peut-être vers les tout petits nombres), car le bruit interne au système disperse les perceptions de numérosités autour de la valeur exacte, et ainsi toutes les valeurs de la ligne interne correspondent à une activation possible.

On part de $N_0 = 1$, qu'on associe arbitrairement avec l'origine de la ligne interne. Si on se déplace jusqu'au seuil de discriminabilité (soit une distance de c sur la ligne interne), on parvient à la valeur $N_1 = 1 + k$. Et ainsi de suite, en se déplaçant de nouveau, on parvient à $N_2 = (1 + k)^2$; au bout de p déplacements, on est parvenu à la numérosité $N_p = (1 + k)^p$, qui correspond au point $Q_p = pc$ sur la ligne interne. On remplace la valeur de p dans l'équation précédente, et on obtient :

$$Q_p = \frac{c}{\log(1+k)}\log(N_p).$$

Ceci étant vrai pour toutes les valeurs correspondant à un nombre entier de déplacements correspondant à la distance de discriminabilité, par continuité, on l'étendra à toutes les valeurs de N:

$$Q(N) = \frac{c}{\log(1+k)}\log(N) \simeq \frac{c}{k}\log(N),$$

soit une échelle interne avec une forme logarithmique.

Van Oeffelen et Vos [van Oeffelen and Vos, 1982] enregistrent des données empiriques dans une tâche d'identification de numérosité, et montrent que celles-ci coïncident remarquablement avec les prédictions du modèle logarithmique de Fechner. Cependant, ils ne comparent pas directement la validité de l'hypothèse

logarithmique par rapport à d'autres échelles internes. Comme nous le verrons ci-dessous, il est extrêmement difficile de développer des tests empiriques capables de séparer efficacement les différentes propositions pour les échelles internes.

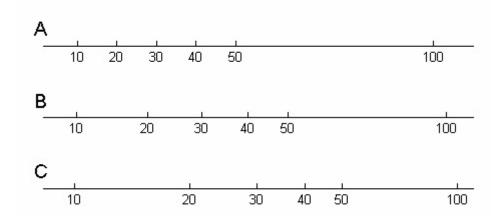


Fig. 3.1 – Disposition des nombres sur une échelle linéaire (A), puissance (B) et logarithmique (C).

3.2.2 Stevens et les partisans de l'échelle puissance

Comme nous le notions plus haut, la seconde hypothèse de Fechner, selon laquelle la distance subjective entre deux stimuli au seuil de discriminabilité est constante, n'est pas absolument nécessaire. Ainsi, par exemple, Brentano pose une condition différente : selon lui, deux stimuli au seuil de discriminabilité sont toujours situés à une même distance relative l'un de l'autre, c'est-à-dire que $\frac{\triangle Q}{Q} = c$.

Suivant le même raisonnement que celui de Fechner ci-dessus, nous considérerons la suite $N_0 = 1$, $N_1 = (1+k)$, ..., $N_p = (1+k)^p$ qui correspond aux points suivants de la ligne numérique : Q_0 , $Q_1 = Q_0 + \triangle Q_0 = (1+c)Q_0$, ..., $Q_p = (1+c)^p$. On peut extraire de la première suite $p = \frac{\log(N_p)}{\log(1+k)}$ puis l'injecter pour trouver la valeur de Q_p :

$$Q_p = (1+c)^{\frac{\log(N_p)}{\log(1+k)}} Q_0 = N_p^{\frac{\log(1+k)}{\log(1+c)}} Q_0.$$

Par continuité, on obtient alors la relation suivante :

$$Q(N) = N^{\frac{\log(1+k)}{\log(1+c)}} Q_0,$$

soit une fonction puissance $Q(N) = \alpha N^{\beta}$ (voir figure 3.1 B).

Contrairement à la fonction logarithmique de Fechner, l'hypothèse de l'échelle puissance a reçu de nombreux appuis expérimentaux, qui dépassent de loin le domaine de la numérosité. Stevens [Stevens, 1964] a consacré de nombreux ouvrages à la défense de sa loi psychophysique générale, de forme puissance. Pour rester dans le domaine des numérosités qui nous concerne, nous citerons en premier lieu les expériences d'estimation de numérosité [Krueger, 1972, Indow and Ida, 1977, Krueger, 1982, Krueger, 1984], dans lesquelles, presque unanimement, les réponses moyennes des sujets suivent une fonction puissance du stimulus. L'exposant de cette fonction puissance est variable, et se situe en moyenne vers 0.85, avec un écart-type de l'ordre

de 0.2 entre les sujets. Seule une étude [Rosner, 1965] reporte une relation linéaire entre les réponses et les stimuli.

D'autres ont employé des techniques plus indirectes pour estimer l'échelle numérique subjective : jugements de similarité entre des nombres [Shepard et al., 1975], bissection d'intervalles numériques [Attneave, 1962], comparaison avec des stimuli physiques (longueur, durée : [Rule, 1969]), estimation de ratios, production de séries arithmétiques, addition et soustraction de nuages de points [Indow and Ida, 1977]. A l'exception de cette dernière condition, l'échelle interne reconstruite sur la base de ces données prend la forme d'une loi puissance.

Outre les expériences d'estimation, d'autres techniques expérimentales ont été appliquées au problème. Par exemple, Banks et ses collègues [Banks and Hill, 1974, Banks and Coleman, 1981] demandent à leurs sujets de produire une suite de nombres, comme s'ils étaient tirés aléatoirement. Dans ce cas-là, les sujets ont tendance à produire plus de petits nombres que de grands; et une fois ordonnées, les nombres produits suivent une fonction puissance avec un exposant de l'ordre de 0.5 (0.4 ou 0.6 suivant les études). Dans une tâche réciproque, où les sujets doivent juger si des suites leur semblent bien aléatoires, celles qui obtiennent le plus haut score ont été générées à partir d'une fonction puissance, avec une valeur d'exposant comparable. Par contre, lorsque le sujet connaît la limite supérieure de la suite numérique aléatoire, ses productions prennent la forme d'une fonction linéaire; de même la séquence qui est jugée la plus aléatoire suit une ditribution uniforme (elle a été générée à partir d'une fonction linéaire). A vrai dire, dans la première condition, il eût été surprenant que les auteurs aient observé une préférence pour une fonction linéaire, en effet, physiquement, une distribution ne peut pas être uniforme sur un intervalle infini. Il paraît donc naturel que les sujets aient choisi de plébisciter une distribution qui soit progressivement atténuée vers les grands nombres, et peut-être que leur accord autour d'une même valeur de l'exposant est lié aux stimuli eux-mêmes, qui selon les hasards de la génération auraient rendu plus ou moins évidente la discontinuité inhérente à leur génération.

La totalité des études reportées ci-dessus tient sur une hypothèse somme toute assez fragile : que les réponses verbales des sujets correspondent fidèlement à leurs impressions subjectives de quantité. Qu'adviendrait-il si la traduction d'une activation sur la ligne interne en un symbole verbal reposait sur une transformation non linéaire?

3.2.3 Gallistel, en faveur d'une échelle interne linéaire

Parmi les différentes lois puissances, il est un cas particulier qui a reçu une attention particulière : il s'agit de l'échelle linéaire (voir figure 3.1 C). A la différence des autres propositions envisagées, une échelle linéaire sous-entend que les nombres sont régulièrement espacés. Les partisans de l'échelle logarithmique au contraire, ainsi que ceux qui soutiennent l'idée d'une loi puissance, prédisent que l'échelle interne est compressive : plus on s'éloigne vers les grands nombres, plus ceux-ci apparaissent proches sur la ligne interne.

C'est précisément cette idée d'une ligne où les nombres sont régulièrement espacés, où les distances qui les séparent indiquent justement la valeur de la distance numérique, qui convainc l'équipe de Gallistel que l'échelle interne doit être linéaire. Dans le cas d'une échelle linéaire, et dans ce cas seulement, les additions

et les soustractions peuvent être très simplement implémentées, en imaginant des déplacements de longueur donnée sur la ligne. Additionner 3 et 8 reviendrait à opérer un déplacement de longueur 8 à partir du nombre 3; les soustractions correspondraient à des déplacements dans le sens contraire. Or de nombreuses données concourent à montrer que les espèces dotés d'un sens des nombres parviennent à effectuer des additions et des soustractions avec aisance [Brannon et al., 2001, Barth et al., 2005, Cordes et al., 2001b]. Gallistel interprète ce dernier résultat comme une preuve que les additions et les soustractions correspondent à des manipulations élémentaires de la ligne numérique, consistant à juxtaposer des segments.

3.2.4 La ligne numérique est-elle compressive? Quelques résultats empiriques contestés

D'aucuns pourront objecter à notre question que certaines des données qui ont émaillé cet exposé dans les parties précédentes suffisent à la résoudre. Par exemple, la loi de Weber prédit que, si on maintient une distance constante entre deux nombres, ceux-ci seront d'autant plus souvent confondus qu'ils sont plus grands. A priori, on peut donc penser que la loi de Weber implique que la ligne interne soit compressive, ce qui expliquerait la confusion entre les grands nombres. Il s'agit là du même raisonnement que que celui qui conduisit Fechner à poser que le seuil de discriminabilité correspond à une distance constante sur la ligne interne. Mais, il est aussi possible d'accorder la loi de Weber avec une échelle linéaire. Il suffit pour cela de supposer que le bruit interne au système croît avec la numérosité encodée : ainsi lorsque les deux nombres sont grands, ce bruit qui augmente gêne la précision de l'encodage, et augmente la confusion entre les stimuli. L'argument que nous venons de donner sera repris dans des termes quantitatifs dans la partie développant notre modèle numérique (voir chapitre 4).

Que dire alors des données de Shepard [Shepard et al., 1975], issues de méthode du scaling multidimensionnel (déjà mentionnées plus haut)? Shepard demande à des sujets de juger de la ressemblance entre des stimuli numériques, ressemblance physique dans un premier temps, puis ressemblance entre les concepts numériques abstraits qu'ils représentent. Lorsque les stimuli sont des points alignés, les relations de proximité émergeant des jugements des sujets peuvent être représentées sur une ligne (soit un espace unidimensionnel), et sur cette ligne les plus grands nombres apparaissent plus compressés. Dans le cas du concept de nombre abstrait, les stimuli sont placés dans un espace à plusieurs dimensions, mais on peut extraire une direction suivant laquelle ils sont ordonnés suivant leur taille : cette direction représente la quantité numérique. En projetant les stimuli sur cette ligne, on observe la même propriété que précédemment : à savoir que les grands nombres apparaissent plus proches les uns des autres. Contrairement aux tâches de comparaison de stimuli dont dérive la loi de Weber, la tâche de Shepard a été conçue pour accéder directement à la distance subjective entre les stimuli. Mais avant de tirer une conclusion hâtive de cette expérience, il convient d'émettre quelques réserves sur la tâche elle-même. Les sujets ont-ils jugé de la ressemblance des stimuli telle qu'elle est représentée par la distance entre deux points sur la ligne numérique, ont-ils réussi à faire abstraction du bruit qui peut dépendre du nombre considéré? N'ont-ils pas plutôt adopté un critère de réponse plus simple, plus pratique, à savoir : "quelle difficulté éprouverais-je à identifier ces deux nombres l'un par rapport à l'autre", mesure de la confusion entre deux stimuli plutôt que de leur ressemblance? Dans le premier cas,

l'observation de Shepard argumente en faveur d'une ligne numérique compressée, dans le deuxième cas, il n'est qu'une observation de plus en faveur de la loi de Weber. Cet exemple illustre la difficulté de concevoir des tâches ciblant l'échelle interne.

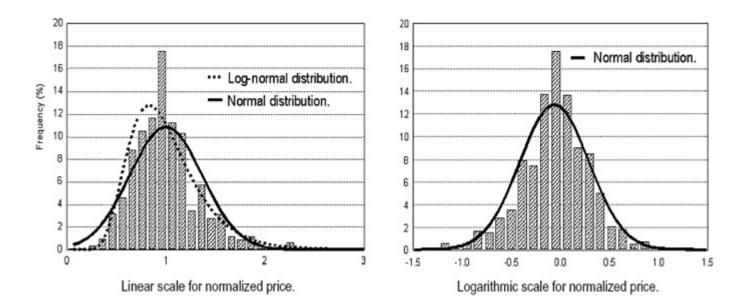


FIG. 3.2 – Forme des distributions des estimations, pour des prix variant sur plusieurs ordres de grandeur. Les réponses ont été normalisées en divisant par le prix moyen de chaque article. Sur une échelle linéaire (graphique de droite), la distribution est asymétrique, et s'ajuste mieux à une courbe log-gaussienne qu'à une gaussienne. Sur une échelle logarithmique (graphique de droite), la distribution apparaît symétrique et s'apparente à une gaussienne. Reproduit depuis [Dehaene and Marques, 2002].

Récemment, l'observation de distribution de réponses asymétriques dans des tâches de production ou d'identification a été interprétée comme une preuve de la non-linéarité de la ligne numérique. Ainsi, Dehaene et Marques [Dehaene and Marques, 2002] notent que les estimations de prix données par différents sujets pour chaque article sont distribuées autour d'une valeur moyenne de manière asymétrique, avec une pente plus abrupte pour les prix inférieurs à cette valeur moyenne, plus douce de l'autre côté (voir figure 3.2). Tracées sur un axe dont l'échelle est logarithmique, les courbes de réponse prennent un aspect symétrique. Chez le singe, Nieder et Miller [Nieder and Miller, 2003] répliquent la même observation au niveau des courbes de réponses, pour des jugements d'égalité numérique entre des paires de stimuli (voir figure 2.6). Or, si on raisonne au niveau de la représentation interne sur la ligne numérique, si l'échelle est linéaire, la distribution des activations pour chaque numérosité est symétrique autour de la valeur moyenne. Si on suppose au contraire que l'échelle interne est logarithmique, la distribution des activations est symétrique si on la trace sur un axe respectant l'échelle interne, c'est-à-dire qui soit logarithmique lui-même. Par conséquent, une fois tracées sur un axe linéaire ces distributions perdent leur axe de symétrie. Ce raisonnement est exact lorsqu'il est appliqué strictement à la distribution des activations internes. Par contre, si on s'intéresse directement aux réponses du sujet, comme c'est le cas dans l'article de Dehaene et Marques et pour les données comportementales de Nieder et Miller, les propriétés de symétrie découlent directement de la loi

de Weber. Imaginons par exemple une tâche consistant à reconnaître un stimulus de numérosité n parmi plusieurs distracteurs. La loi de Weber prédit que deux stimuli séparés de n par le même rapport (soit par exemple αn et $\frac{n}{\alpha}$) donneront lieu à la même performance. Or, ces deux stimuli sont situés à la même distance de n sur un axe logarithmique, puisque les logarithmes de $\frac{n}{\alpha}$, n et αn valent respectivement $\log(n) - \log(\alpha)$, $\log(n)$ et $\log(n) + \log(\alpha)$. Selon la loi de Weber, les courbes de réponse sont donc symétriques sur un axe logarithmique, et ne le sont pas sur un axe linéaire. Par conséquent, les observations sur la forme des courbes ne permettent pas de statuer sur la linéarité de l'échelle de la ligne numérique interne.

On relève le même type de confusion chez les partisans de la fonction puissance. Cette hypothèse a émergé à partir des données d'estimation de numérosité : la réponse moyenne forme en général une fonction puissance de la numérosité réelle. De cette observation, certains conclurent que l'echelle interne des nombres est elle-même une fonction puissance. Premièrement, nous noterons qu'il peut être difficile de séparer expérimentalement une loi logarithmique et une loi puissance. D'autre part, identifier les réponses verbales aux représentations sur l'échelle interne, c'était négliger que la fonction qui exprime la transformation d'une activation sur la ligne interne en une réponse verbale puisse elle-même être non-linéaire. Il est au contraire plausible de penser que les sujets apprennent avec l'expérience à corriger leur réponses pour s'accorder au mieux à la réalité. Dans un cadre strictement Fechnerien, on peut prédire ainsi que les réponses suivent une loi puissance. En effet, la tâche d'estimation consiste à confronter successivement deux continua : dans un premier temps le stimulus est encodé sous forme d'une activation interne $(Q = \log_{b_1}(n))$. Puis le sujet produit la réponse qui correspond à Q, sur un continuum logarithmique, mais possiblement avec une échelle différente : $Q = \log_{b_2}(R)$. Quand on exprime la réponse R en fonction de la valeur du stimulus n on obtient donc une loi puissance : $R = n^{\frac{\log(b_1)}{\log(b_2)}}$.

Enfin puisqu'il convient enfin d'équilibrer notre discussion entre les défenseurs de la ligne logarithmique et de la ligne linéaire, nous nous devons d'examiner également les arguments de ces derniers. En montrant que des pigeons sont capables d'utiliser leur représentations numériques pour effectuer des soustractions, Brannon et al [Brannon et al., 2001] prétendent avoir démontré que l'hypothèse d'une échelle logarithmique est impossible à tenir. Ils utilisent le modèle de la ligne numérique pour rendre compte du comportement de leurs oiseaux : selon eux, les soustractions (et les additions) seraient effectuées en opérant un déplacement mesuré sur la ligne numérique. Après avoir effectué 5 appuis sur le bouton A, un pigeon se rend compte qu'il a le choix entre continuer sur ce même bouton pour atteindre les 16 appuis requis, ou utiliser le bouton B qui vient de s'allumer, et qui ne demande que 8 appuis : selon eux l'animal compare la longueur du segment qui sépare les quantités 5 et 16, avec la longueur 8, et répond sur cette base. Si ce modèle de la tâche et valide, et seulement dans ce cas-là, une échelle logarithmique conduirait à des résultats aberrants, alors que les données montrent que les sujets sont proches de l'optimalité. En réponse à cet article, Dehaene [Dehaene, 2001] construit un modèle computationnel basé sur une ligne logarithmique, et capable d'effectuer correctement la tâche de soustraction. Il prouve par là que si on accepte d'abandonner l'image du déplacement mesuré la tâche n'est plus inaccessible à un modèle logarithmique.

Enfin, il ne faut pas négliger que, même si la ligne numérique est compressive, suivant une loi logarith-

mique ou puissance, les sujets peuvent avoir appris à corriger leurs perceptions pour mieux s'adapter au réel, où les lois qui régissent les quantités (additions, soustraction) sont linéaires. Ainsi, dans leur exploration de l'échelle numérique interne, Indow et Ida [Indow and Ida, 1977] contrastent la tâche d'estimation d'additions et de soustraction, où les sujets sont linéaires, avec une série d'autres tâches d'estimation (estimation de la numérosité d'un nuage de points, estimation de rapport entre deux numérosités, continuation de suite arithmétique), où ils enregistrent des biais systématiques. Dans le cas des additions et soustractions seulement, l'échelle interne reconstruite est linéaire, alors que dans tous les autres cas, ils obtiennent une loi puissance, avec un exposant variable. Les sujets auraient appris à corriger leurs perceptions dans le cas des additions et soustractions seulement (par exemple en utilisant une stratégie d'imagerie mentale). Dans les autres cas, suivant la tâche, ils ont appris à appliquer une correction plus ou moins efficace, ce qui explique que les exposants soient variables. Siegler et Opfer [Siegler and Opfer, 2003] ont étudié le développement d'une tâche que les adultes résolvent parfaitement, et qui consiste à placer des nombres sur une ligne graduée. Tandis que les adultes, les enfants de 12 ans, parviennent à disposer les nombres avec régularité, les enfants de 8 ans produisent une ligne compressée.

Dans ce contexte, où les biais peuvent être corrigés pour produire des réponses justes, il devient difficile de séparer expérimentalement nos trois alternatives (échelle logarithmique, puissance ou linéaire). A l'instar de Gallistel et Gelman [Gallistel and Gelman, ress], on pourrait adopter une définition opérationnelle des représentations de numérosité : ce sont les représentations sur lesquelles on peut opérer des combinaisons analogues à celles qui définissent l'anneau des nombres entiers (addition, soustraction, multiplication). Suivant cette définition, il apparait naturel de postuler que l'échelle interne est linéaire. Nous croyons au contraire qu'il existe un niveau de codage inférieur, où les numérosités sont encodées de manière compressive. Dans les tâches où les sujets sont entraînés, ce niveau de codage n'est pas apparent, car ceux-ci ont appris à compenser les non-linéarités. Cette compensation n'étant pas parfaite, nous pensons qu'il doit exister des tâches révélant des "effets de bords", subtiles perturbations que l'on attribuera à des imperfections dans la compensation des non-linéarités originelles.

RÉSUMÉ - La métaphore de la ligne numérique

Le système de représentations analogiques des quantités est modélisé en faisant appel à la notion de ligne numérique. La ligne permet de rendre compte des relations de proximité entre les nombres, et de l'ordre naturel sur les entiers. Elle modélise parfaitement l'idée de représentations analogiques, puisque les codes sous-jacents (position spatiale) se ressemblent d'autant plus que les nombres sont proches. De plus on peut exhiber une dimension du code (longueur sur la ligne depuis le point 0) sur laquelle l'amplitude est corrélée avec la quantité codée.

Au-delà de la métaphore initiale, la ligne numérique possède un pouvoir représentationnel qui dépasse les premières espérances. De nombreuses observations, chez les synesthètes, ou chez des sujets normaux, rendent compte d'interférences troublantes entre les nombres et l'espace. De manière générale, les effets observés sont cohérents avec une orientation de la ligne de gauche à droite, petits nombres à l'extrémité gauche, plus grands situés plus à droite.

De quels mécanismes neuronaux naissent ces interférences? Des données d'IRM fonctionnelle comparant des tâches numérique et spatiale suggèrent que certaines populations de neurones sont bivalentes, interviennent dans l'encodage des nombres et de l'espace. Nous proposons également une deuxième hypothèse, selon laquelle les populations de neurones associées aux nombres et à l'espace, même si elles sont dissociées, possèdent une structure équivalente, en sorte qu'elles soient toutes les deux adaptées à un mécanisme de décodage, originellement conçu pour décoder des représentations spatiales, et dont émergent des sensations spatiales.

Puisque nous avons donné un modèle des représentations numériques sous la forme d'une ligne numérique, une question émerge naturellement : comment cette ligne est-elle graduée? Tous les nombres sont-ils espacés régulièrement, ou apparaissent-ils de plus en plus compressés vers les grands nombres? Trois hypothèses ont été formulées : l'échelle interne serait logarithmique $(q(n) = \log(n))$, puissance $(q(n) = n^{\beta})$ ou linéaire (q(n) = n). A ce jour, il n'existe pas de données empiriques apportant de réponse définitive à cette question. De plus, il a été montré que les enfants apprennent à corriger les biais auxquels sont soumis leurs réponses, en sorte que leur comportement, comme celui des adultes, suive comme le réel une loi linéaire. L'existence de tels mécanismes complique l'approche expérimentale de la question.

Chapitre 4

Modèle mathématique de la ligne numérique interne

Ici commence la première partie de notre contribution à l'effort de réflexion sur la cognition numérique. Cette partie est exclusivement théorique. En donnant comme cadre général un modèle de représentation de la numérosité sur une ligne interne, nous avons cherché à synthétiser un certain nombre de propositions antérieures. L'introduction de ce formalisme apporte par ailleurs des lumières sur un certain nombre de propriétés de la cognition numérique (traditionnellement confondues sous le nom de loi de Weber), et permet d'identifier les relations logiques d'équivalence ou d'implication liant ces propriétés. Le chapitre suivant confrontera ce modèle à un certain nombre de situations expérimentales, dont en particulier la comparaison et l'estimation de numérosités.

4.1 Notions sur la loi de Thurstone

Au cours du chapitre précédent (voir chapitre 3), nous avons introduit l'idée que les quantités numériques sont traitées sur un continuum interne, celui que l'on appelle traditionnellement la ligne numérique interne. Cette propriété de la cognition numérique la rend compatible avec le cadre théorique de Thurstone [Thurstone, 1927]. Selon ce dernier, les tâches de comparaison, impliquant un continuum physique (poids, intensité sonore, intensité lumineuse...) sont traitées en utilisant une variable interne, analogue au continuum externe considéré. A chaque valeur physique du stimulus S, correspond donc une valeur sur le continuum interne, que nous noterons par la suite q(S). Les représentations des stimuli sur ce continuum interne interviennent dans les mécanismes de prise de décision propre à la tâche. Par exemple pour décider si un stimulus S est plus lumineux qu'un stimulus de référence R, on comparera les valeurs internes q(S) et q(R) associées respectivement à S et à R.

Partant du modèle ci-dessus, Thurstone introduit une source de variabilité. Un stimulus de valeur physique S n'est pas toujours encodé par la même valeur interne q(S), mais au fil des répétitions du stimulus, la valeur interne associée varie autour de q(S), en suivant une distribution gaussienne.

Ajoutons à ce cadre quelques idées issues de la théorie de détection du signal [Wickens, 2002]. Pour répondre à la tâche qui lui est posée, le sujet fixe un certain nombre de critères sur son continuum interne, qui délimitent les parties du continuum associées aux différentes réponses. S'il faut comparer la luminosité d'un stimulus S à un stimulus de référence R connu, le sujet peut par exemple placer un critère au niveau de q(R): si l'activation observée en réponse au stimulus S est inférieure à q(R), il répond "plus lumineux", sinon, il répond "moins lumineux".

De la manière dont nous l'avons introduit, le fait de définir des critères pourrait sembler arbitraire. En fait, l'utilisation de critères émerge si l'on cherche à optimiser le comportement, en maximisant le taux de réponses correctes. Considérons encore notre tâche de comparaison. Le sujet a vu un stimulus S, cette perception s'est traduite par une activation sur son continuum interne de valeur S^* , et c'est là la seule information à laquelle il a accès pour décider de sa réponse. Il s'agit donc d'inférer la valeur du stimulus externe à partir de la valeur de l'activation sur le continuum interne. Cherchons quelle est la valeur la plus probable pour le stimulus sachant qu'on a observé une activation interne sur le point S^* : il faut pour cela comparer les probabilités conditionnelles $p(S_i|$ activation S^*), où les S_i sont les différentes catégories de stimuli. Pour donner un exemple concret, supposons que dans une expérience on présente deux types de stimuli, des stimuli lourds et des stimuli légers. Alors, afin de décider si un stimulus est de type lourd ou léger, il faut calculer les probabilités conditionnelles p (stimulus léger | activation S^*) et p (stimulus lourd | activation S^*). Nous choisirons la réponse associée à la probabilité la plus élevée.

Or, en application de la loi de Bayes :

$$p$$
 (stimulus lourd | activation S^*) = p (activation S^* | stimulus lourd) $\frac{p$ (stimulus lourd) $\frac{p}{p}$ (activation S^*)

et

$$p$$
 (stimulus léger | activation S^*) = p (activation S^* | stimulus léger) $\frac{p$ (stimulus léger) $\frac{p$ (activation S^*).

Si les deux réponses "stimulus lourd" et "stimulus léger" sont équiprobables (ce qui est généralement le cas dans les expériences de psychophysique), les fractions intervenant dans le terme de droite sont égales pour les probabilités deux réponses, comparer ces deux $\operatorname{revient}$ à comparer $_{
m les}$ probabilités p (activation S^*) stimulus léger) et p (activation S^*) stimulus lourd). Le graphe qui représente la distribution des activations sur le continuum interne donne justement la valeur de la probabilité que l'activation tombe en un point donné pour différents stimuli. A la lumière de ces explications, la stratégie optimale dicte donc de répondre "plus léger" lorsque la courbe de la distribution d'activation du stimulus léger est au-dessus de celle du stimulus lourd; et répondre "plus lourd" lorsque la courbe de distribution du stimulus lourd est au-dessus de celle du stimulus léger. Vu la forme gaussienne de ces courbes de distribution, elles se croisent généralement en un seul point. A gauche de celui-ci, la courbe pour le stimulus léger est au-dessus de celle pour le stimulus lourd, et si une activation est observée sur cette partie du continuum il faudra répondre "plus léger". A droite, c'est la courbe du stimulus lourd qui est au-dessus, et cette partie du continuum est donc associée avec la réponse "plus lourd". La stratégie optimale consiste donc à définir un critère séparant

les deux réponses sur le continuum, et ce critère s'il est optimal sera placé au point de croisement entre les deux courbes de distribution (voir figure 4.1).

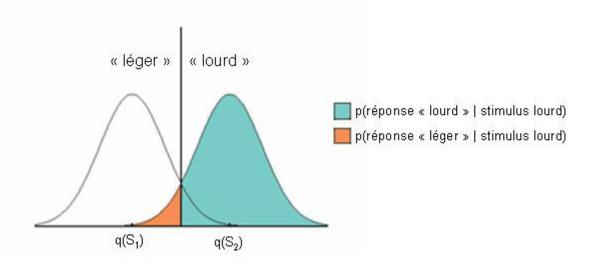


FIG. 4.1 – Modèle de prise de décision selon la Théorie de Détection du Signal. Les stimuli S_1 (léger) et S_2 (lourd) sont représentés sur un continuum interne, avec une distribution gaussienne. La méthode du maximum de vraisemblance préconise de placer un critère sur le continuum interne, à l'endroit où les courbes des deux distributions de croisent : si le continuum interne est activé à gauche du critère, la réponse "léger" est choisie ; s'il est activé à droite du critère, la réponse choisie est "lourd". L'aire sous la courbe de distribution pour les différentes parties de la ligne interne donne la probabilité de choisir chaque réponse.

Le modèle Thurstonien ci-dessus a été appliqué à la perception de la numérosité par Van Oeffelen et Vos [van Oeffelen and Vos, 1982] en 1982. Au cadre sommaire ci-dessus, Van Oeffelen et Vos ont adjoint de nouvelles hypothèses. Ils ont tout d'abord supposé que la loi q qui associe à chaque numérosité un niveau d'activation sur la ligne interne était logarithmique. De plus, ils supposent que la variabilité de la distribution gaussienne qui décrit la dispersion des activations autour de q(n) est constante. Le paramètre de dispersion, auquel nous accorderons une grande attention par la suite, correspond à ce que nous appellerons la fraction de Weber interne (notée w). Avec ce modèle, Van Oeffelen et Vos parviennent à rendre compte remarquablement des réponses des sujets dans une tâche d'identification de numérosité. Différents nuages de points sont montrés successivement, et le sujet doit reconnaître à chaque fois s'il contient n_1 ou n_2 points (les valeurs de n_1 et n_2 lui ont été données par l'expérimentateur). Conformément aux prédictions du modèle, le taux de réponses correctes dépend de la distance entre les deux numérosités n_1 et n_2 , ainsi que de leur taille; et la donnée d'un seul paramètre (la valeur de w, qu'ils estiment à 0.11) suffit à rendre compte de tous ces effets.

4.2 Trois alternatives pour l'échelle interne

Historiquement, trois alternatives ont été proposées pour l'échelle interne : une échelle logarithmique (Fechner, Dehaene), une échelle puissance (Stevens, Krueger) avec un exposant inférieur à 1, ou une échelle linéaire - loi puissance d'exposant 1 (Gallistel). Nous renvoyons à la lecture du chapitre 3 pour un exposé des

arguments empiriques et théoriques qui ont conduit à ces trois hypothèses. Toutes trois restent compatibles avec le cadre de travail Thurstonien, et c'est pourquoi nous emploierons ici un formalisme général, que l'on pourra accorder à l'envi à l'une ou l'autre des échelles choisies. Voici la description de ce formalisme :

Lorqu'un stimulus est perçu, sa numérosité est représentée sur un continuum interne. Nous supposons que toute représentation de numérosité peut être résumée par une seule valeur quantitative - sa position sur le continuum interne. A priori, la représentation de numérosité peut prendre un ensemble continu de valeurs. Pour un stimulus de numérosité n, la ligne interne sera activée en un point, au voisinage du point q_n . Conformément à l'hypothèse de Thurstone, la dispersion de l'activation autour du point q_n suit une distribution gaussienne, dont l'écart type sera noté w_n . Dans ce contexte, la fonction q_n n'est autre que ce qu'on a appelé jusqu'ici l'échelle interne. Elle sera donc soit logarithmique $(q_n = \log(n))$, soit puissance $(q_n = n^k)$, soit linéaire $(q_n = n)$.

4.3 Autour de la loi de Weber

4.3.1 Plusieurs formulations de la loi de Weber

On recense dans la littérature plusieurs propriétés sous le nom de loi de Weber. Pour éviter toute confusion, nous nommerons par la suite loi de Weber la propriété originellement décrite par Weber lui-même. Weber avait procédé à la mesure des seuils de discriminabilité : la différence qu'il faut introduire entre deux stimuli pour qu'ils soient perceptiblement différents est proportionnelle à la taille des stimuli eux-mêmes. Il s'agissait à l'origine d'une loi très générale, s'appliquant à des attributs perceptifs de bas niveau (poids, intensité lumineuse), avant qu'il fût démontré que la même observation pouvait être réalisée sur des domaines cognitifs de plus haut niveau, tels que la perception des nombres.

Quelle que soit la méthode employée, la mesure de seuils de discrimination requiert la répétition fastidieuse de nombreux essais; c'est certainement pour cette raison que la loi de Weber a été abandonnée au profit de la règle du ratio, à tel point que celle-ci a souvent été présentée sous l'appellation loi de Weber. La règle du ratio stipule que le niveau auquel deux stimuli peuvent être discriminés dépend exclusivement du ratio entre ces deux stimuli. Intuitivement, on comprend que ces deux lois doivent décrire le même phénomène : si le seuil de discrimination est proportionnel au stimulus considéré (loi de Weber), alors dans les paires 2/4 et 3/6 les stimuli sont situés à une même différence perceptive l'un de l'autre (différence mesurée en nombre de pas élémentaires, correspondant au seuil de discrimination). Par suite ces paires seront discriminées avec le même taux de réponses correctes, comme d'ailleurs toutes les paires de stimuli présentant un ratio de 2. Nous donnons ci-après une démonstration en bonne et dûe forme de l'équivalence entre le loi de Weber et la règle du ratio.

Enfin, on trouve dans la littérature une troisième propriété parfois désignée sous le nom de loi de Weber: il s'agit de la propriété de variabilité scalaire. Dans une tâche d'estimation, on mesure la réponse moyenne des sujets, et l'écart type de ses réponses pour chaque valeur de stimulus: ces deux grandeurs sont proportionnelles, croissant simultanément lorsque la taille des stimuli augmente. Le rapport entre la variabilité

scalaire et la loi de Weber originelle est plus complexe, car dans un cas on se situe dans le cadre d'une tâche d'estimation (variabilité scalaire) et dans l'autre on travaille sur la comparaison de stimuli (loi de Weber). Il faudra donc réfléchir à la tâche d'estimation, plus précisément à la manière dont le sujet choisit ses réponses. Nous remettons donc la résolution de cette question à la fin de ce chapitre, après l'exposé de notre modèle de l'estimation.

4.3.2 Démonstration de l'équivalence entre la loi de Weber et la règle du ratio

Nous reprenons ici le formalisme introduit au paragraphe 2.4. La *Loi de Weber* pose que le seuil de discriminabilité est proportionnel à la valeur du stimulus, elle s'écrit de la manière suivante :

$$\exists \alpha \in [1, \infty[: \forall n, \operatorname{discr}(n, \alpha n) = 75\%,$$

où discr (n_1, n_2) donne la performance pour discriminer deux stimuli de numérosité n_1 et n_2 .

Bien que le seuil de discriminabilité soit traditionnellement et arbitrairement associé à un niveau de discrimination de 75% de réponses correctes, nous supposons cette propriété étendue à l'ensemble des performances possibles dans l'énoncé suivant :

$$\forall p \in [0.5, 1[, \exists \alpha(p) \in [1, \infty[: \forall n, \operatorname{discr}(n, \alpha(p)n) = p.$$

La $R\`egle~du~Ratio$ dit que la performance ne dépend que du ratio entre les deux numérosités à comparer. L'énoncé que nous donnons exprime la même idée sous une forme différente : toutes les paires de stimuli séparées par le même ratio α donnent lieu au même niveau de performance :

$$\forall \alpha \in [1, \infty[, \exists p(\alpha) \in [0.5, 1] : \forall n, \operatorname{discr}(n, \alpha n) = p(\alpha).$$

Notre but dans ce qui suit est de démontrer que les deux énoncés précédents sont logiquement équivalents.

A priori, la fonction $\operatorname{discr}(n_1, n_2)$ est définie sur des arguments à valeurs discrètes, mais, dans la suite de la démonstration, nous travaillerons sur une extension où n_2 est un nombre $r\acute{e}el$ positif. De plus, nous supposons que les fonctions $\varphi_n:\alpha\mapsto\operatorname{discr}(n,\alpha n)$ sont continues et strictement croissantes sur $[1,\infty[$. Nous nous convaincrons aisément qu'une telle extension existe toujours : par exemple, il suffit de prendre l'interpolation affine de discr entre les points (n_1,n_2) et (n_1,n_2+1) . Nous supposons de plus que l'image de chaque φ_n contient toujours l'intervalle [0.5,1[: le niveau de performance est au hasard quand les stimuli ne sont pas discriminables $(\varphi_n(1)=\operatorname{discr}(n,n)=0.5))$, et les performances sont parfaites quand les stimuli sont extrêmement distants $(\varphi_n(\infty)=1)$.

Première implication : règle du ratio ⇒ loi de Weber

Nous partons de la règle du ratio :

$$\forall \alpha \in [1, \infty[, \exists p(\alpha) \in [0.5, 1] : \forall n, \operatorname{discr}(n, \alpha n) = p(\alpha).$$

Nous pouvons réécrire cette propriété en termes fonctionnels comme suit :

$$\exists p: [1,\infty] \to [0.5,1]$$
 telle que $\forall n, \varphi_n = p$

Comme les φ_n sont inversibles, p est aussi inversible elle-même, et comme de plus l'image des φ s contient $[0.51[, p^{-1}$ est définie sur $[0.5, 1[, p^{-1}$ verifie $\varphi_n \circ p^{-1} = Id_{(0,1)}$, pour tout n. Si nous posons $\alpha = p^{-1}$, la ligne précédente n'est autre que la loi de Weber : $\forall p \in]0, 1[, \forall n, \operatorname{discr}(n, \alpha(p)n) = p$.

Deuxième implication : loi de Weber ⇒ règle du ratio

Nous partons cette fois de la loi de Weber:

$$\forall p \in [0.5, 1[, \exists \alpha(p) \in [1, \infty[: \forall n, \operatorname{discr}(n, \alpha(p)n) = p])$$

Nous pouvons réécrire cette propriété comme suit :

$$\exists \alpha : [1, \infty[\to [0.5, 1[\text{ telle que } \forall n, \varphi_n \circ \alpha = Id_{[1, \infty[}]$$

C'est dire que $\alpha = \varphi_n^{-1}$ pour tout n, et toutes les φ_n s sont égales à une fonction unique φ . Cela signifie que, pour tout α , $\varphi_n(\alpha) = \operatorname{discr}(n, \alpha n)$ est indépendant de n. En posant $\varphi(\alpha) = p(\alpha)$, on obtient l'énoncé de la règle du ratio : $\forall \alpha \in [1, \infty[, \forall n, \operatorname{discr}(n, \alpha n) = p(\alpha).$

4.3.3 Compatibilité des trois échelles internes avec la loi de Weber

La règle du ratio a été observée chez des populations variées : enfants [Barth et al., 2005], bébés [Lipton and Spelke, 2003], animaux [Hauser et al., 2003, Brannon and Terrace, 2000], et adultes [Van Oeffelen and Vos, 1982] (voir paragraphe 2.4). Il est donc crucial pour qu'un modèle de représentation de la numérosité soit valable qu'il puisse expliquer la règle du ratio (ou la loi de Weber qui lui est équivalente).

Nous montrons ci-dessous que, pour les trois propositions d'échelle interne q_n , le niveau de bruit w_n peut être adapté en sorte que la règle du ratio soit prédite par le modèle. Pour une échelle logarithme il faut ainsi que le bruit soit constant $(w_n = w)$. Si l'échelle est une fonction puissance, le bruit doit être une fonction puissance lui aussi $(w_n = wn^k$ si $q_n = n^k)$. Enfin, si l'échelle est linéaire, il faut de la même façon que le bruit soit également linéaire $(w_n = wn)$.

Voici la démonstration que nous en donnons. Pour discriminer deux numérosités n_1 et n_2 , le sujet place un critère situé au point de croisement entre les courbes d'activations de ces deux numérosités. Si l'on nomme $c(n_1, n_2)$ ce point, le taux de réponses correctes correspond à :

$$P = p(n_1) \int_{-\infty}^{c(n_1, n_2)} \text{Gauss}(q_{n_1}, w) + p(n_2) \int_{c(n_1, n_2)}^{+\infty} \text{Gauss}(q_{n_2}, w),$$

qui n'est autre que l'aire de la zone de recouvrement entre les courbes d'activations sur la ligne numérique interne (voir figure 4.1).

Lorsqu'on présente deux paires de stimuli (n_1, n_2) et $(\gamma n_1, \gamma n_2)$ séparés par le même ratio $\frac{n_1}{n_2}$, la règle du ratio prédit que le taux de discrimination doit être le même pour chaque paire. La figure 4.2 illustre comment

la règle du ratio est vérifiée dans les trois cas d'échelle interne (logarithmique, puissance, et linéaire). Si l'échelle est logarithmique, les distances $q_{n_1} - q_{n_2}$ et $q_{\gamma n_1} - q_{\gamma n_2}$ sont toutes les deux égales à $log(\frac{n_1}{n_2})$. De ce fait, en postulant une variabilité constante $w_n = w$, l'aire de recouvrement entre les courbes est la même pour les deux paires de numérosité : la règle du ratio est vérifiée. Si l'échelle interne est une fonction puissance $q_n = n^k$, et que nous posons $w_n = wn^k$, alors les courbes d'activation pour la paire $(\gamma n_1, \gamma n_2)$ sont les images des courbes d'activations pour (n_1, n_2) par deux transformations successives : une affinité de facteur γ parallèlement à l'axe horizontal, suivie d'une affinité de facteur $\frac{1}{\gamma}$ le long de l'axe vertical. Appliquées successivement, ces deux transformations laissent les aires inchangées, et donc la zone de recouvrement des courbes a la même aire pour les deux paires de stimuli, et la règle du ratio est vérifiée. Ce même raisonnement s'applique bien sûr au cas de l'échelle linéaire, qui n'est formellement qu'un cas particulier de l'échelle puissance $(k = 1, w_n = wn)$.

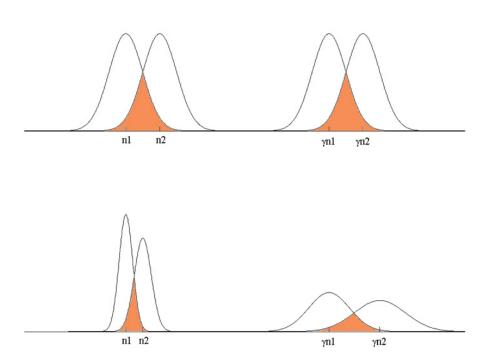


FIG. 4.2 – Illustration de la loi de Weber ("règle du ratio") pour des échelles logarithmique d'une part, linéaire et puissance d'autre part. Sur chaque graphique sont représentées les distributions des activations sur la ligne numérique interne pour les numérosités n_1 , n_2 , γn_1 and γn_2 . L'aire de la partie colorée correspond au taux d'erreur pour une tâche de discrimination entre n_1 et n_2 (courbes de gauche) et entre γn_1 et γn_2 (courbes de droite). D'après la loi du ratio, cette aire est la même pour les courbes de droite et de gauche.

Il serait intéressant de savoir si on peut étendre encore le résultat précédent : étant donné une échelle interne, peut-on toujours adapter le niveau de bruit en sorte que le modèle considéré soit compatible avec la loi de Weber? J'ai l'intuition, mais n'ai pas réussi à montrer, que les trois cas que nous avons exposés précédemment sont les seuls pour lesquels on peut donner une formule explicite. A partir de ces trois cas,

on peut construire toute une famille de fonctions en raccordant plusieurs parties, de forme logarithmique, linéaire, ou puissance : pour toutes ces fonctions, on peut ajuster localement le niveau de bruit et le modèle reste compatible avec la loi de Weber. Dans le cas général, si on pose que l'aire de recouvrement des courbes associées aux numérosités $(\gamma n_1, \gamma n_2)$ ne dépend pas de γ , on obtient une équation différentielle, reliant w à q, si complexe qu'elle s'écarte de tous les cas réguliers de ma connaissance. Les trois cas présentés cidessus correspondent en fait à des cas particuliers pour cette équation différentielle, où une partie des termes s'annulent. Il est probable que cette équation n'ait pas de solution dans le cas général. Par contre, il est tout à fait possible qu'on puisse toujours exhiber une solution approchée à ce problème, où la règle du ratio ne serait vérifiée que pour des nombres pas trop élevés, et pas trop distants entre eux. 1

4.3.4 Fraction de Weber comportementale et fraction de Weber interne

Nous avons introduit plus haut (voir paragraphe 2.4) la fraction de Weber comportementale, estimateur traditionnellement utilisé pour quantifier la précision du comportement, dans les situations où la règle du ratio est valide. Comme nous l'avons vu, il existe plusieurs formulations pour la fraction de Weber comportementale, assez apparentées entre elles :

- 1. $WF = \frac{\text{Stim}(75\%) n}{n}$ [Taves, 1941, Newman, 1974, Van Oeffelen and Vos, 1982, Allik and Tuulmets, 1991, Allik and Tuulmets, 1993].
- 2. $WF = \frac{\text{Stim}(75\%) \text{Stim}(25\%)}{2n}$ [Emmerton et al., 1997, Nieder and Miller, 2003, Krueger, 1984].
- 3. $WF = \frac{1}{2} \left(\frac{\text{Stim}(75\%) n}{n} + \frac{n \text{Stim}(25\%)}{\text{Stim}(25\%)} \right)$ [Nieder and Miller, 2003].

(où Stim(x%) désigne la valeur du stimulus donnant lieu à x% de réponses correctes, et n désigne la valeur du stimulus de référence). Nous allons tâcher ci-après de relier la fraction de Weber comportementale aux paramètres de notre modèle.

Dans le modèle exposé ci-dessus, et pour les trois échelles internes considérés, nous avons été amené à introduire un paramètre w. Ce paramètre conditionne le niveau de bruit pour l'ensemble des numérosités. Dans le cas d'une échelle linéaire, 70 % des activations provoquées par un stimulus de numérosité n tomberont dans l'intervalle [n-nw,n+nw], soit un intervalle de largeur 2nw centré sur n. Dans le cas d'une échelle logarithmique, 70% des activations tombent entre les points $\log(n)-w$ et $\log(n)+w$ sur la ligne numérique interne, deux points associés aux numérosités ne^{-w} et ne^{w} (que l'on peut approximer par n(1-w) et n(1+w) car la valeur de w est en général proche de 0) : il s'agit encore d'un intervalle de largeur 2nw et centré sur n. Enfin, dans le cas d'une échelle puissance, 70% des activations sur la ligne numérique interne sont sur l'intervalle $[n^k - wn^k, n^k + wn^k]$, correspondant aux numérosités $[n(1-w)^k, n(1+w)^k]$ (soit en approximant $[n-\frac{nw}{k}, n+\frac{nw}{k}]$). Ainsi, dans le cas des échelles linéaire et logarithmique, le paramètre w mesure directement la dispersion des perceptions autour de la valeur moyenne, normalisée par rapport à la

¹Par extension à partir des trois cas particuliers où nous avons réussi à vérifier la loi de Weber, nous intuitons que la solution générale au problème, pour une fonction q donnée, croissante et assez régulière, serait $w_n = nq_n t$. En approximant les taux de réponses correctes, on obtient un terme général qui ne dépend que du ratio entre les deux numérosités à comparer; mais nous ne sommes pas parvenu à donner une forme rigoureuse à ces calculs pour l'instant.

valeur du stimulus. Dans le cas de l'échelle puissance, la valeur de w en elle-même est moins éloquente, il faudrait la corriger par un facteur k (correspondant à la valeur de l'exposant sur la ligne interne). Néanmoins, si on considère que la valeur de l'exposant varie peu d'un sujet à l'autre et dans le temps, w reste une assez bonne mesure du niveau de bruit global.

A la fraction de Weber comportementale, un paramètre qui reste intimement lié au type de tâche étudiée, nous proposons de substituer la fraction de Weber interne w, qui, on le verra, peut être définie dans des contextes variés, dépassant le cadre de la comparaison numérique. Il est facile de calculer la valeur de w en fonction de WF. Nous avons vu qu'on peut donner la probabilité de répondre correctement lorsque deux numérosités n_1 et n_2 sont comparées :

$$P_{corr} = p(n_1) \int_{-\infty}^{c(n_1, n_2)} \text{Gauss} (\log(n_1), w) + p(n_2) \int_{c(n_1, n_2)}^{+\infty} \text{Gauss} (\log(n_2), w).$$

Plaçons-nous dans le cadre du modèle logarithmique : toutes les distributions ont la même largeur (écarttype constant w), et le critère $c(n_1, n_2)$ est donc placé à mi-chemin entre n_1 et n_2 .

$$P_{corr} = p(n_1) \int_{-\infty}^{\frac{\log(n_1) + \log(n_2)}{2}} Gauss(\log(n_1), w) + p(n_2) \int_{\frac{\log(n_1) + \log(n_2)}{2}}^{+\infty} Gauss(\log(n_2), w)$$

$$= p(n_1) \int_{-\infty}^{\frac{\log(n_2) - \log(n_1)}{2w}} Gauss(0, 1) + p(n_2) \int_{\frac{\log(n_2) - \log(n_1)}{2w}}^{+\infty} Gauss(0, 1)$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{\log(n_2) - \log(n_1)}{2w}} Gauss(0, 1)$$

Ce qui revient à écrire :

$$Z(P_{corr}) = \frac{\log(n_2) - \log(n_1)}{2w}$$
$$\log(n_2) = 2wZ(P_{corr}) + \log(n_1)$$
$$\log(\operatorname{Stim}(x\%)) = 2wZ(x\%) + \log(n_1)$$
$$\operatorname{Stim}(x\%) = n_1 e^{2wZ(x\%)}$$
$$\approx n_1 (1 + 2wZ(x\%)).$$

Nous pouvons alors vérifier que les trois formules classiques pour la fraction de Weber comportementale correspondent à la même quantité vis-à-vis de notre modèle :

$$WF = 2wZ(75\%) \tag{4.1}$$

1. WF₁ =
$$\frac{\text{Stim}(75\%) - n}{n}$$

 $\approx \frac{n(1 + 2wZ(75\%)) - n}{n}$
= $2wZ(75\%)$.

2. WF₂ =
$$\frac{\text{Stim}(75\%) - \text{Stim}(25\%)}{2n}$$

 $\approx \frac{n(1 + 2wZ(75\%)) - n(1 + 2wZ(25\%))}{2n}$
= $\frac{2w(Z(75\%) - Z(25\%))}{2}$
= $2wZ(75\%)$.

3. WF₃ =
$$\frac{1}{2} \left(\frac{\text{Stim}(75\%) - n}{n} + \frac{n - \text{Stim}(25\%)}{\text{Stim}(25\%)} \right)$$

 $\approx \frac{1}{2} \left(2wZ(75\%) + \frac{-2wZ(25\%)}{1 - 2wZ(25\%)} \right)$
 $\approx \frac{1}{2} \left(2wZ(75\%) - 2wZ(25\%) \right)$
= $2wZ(75\%)$.

Ce qui précède donne le lien entre fraction de Weber comportementale WF et fraction de Weber interne w dans le cadre du modèle logarithme. Si notre choix s'est arrêté sur ce modèle particulier, c'est parce qu'il rendait les calculs nettement plus limpides que l'emploi d'une échelle interne linéaire ou puissance. Néanmoins, en considérant les remarques précédentes sur le sens du paramètre w, on voit qu'il correspond à la même mesure pour les modèles logarithmiques et linéaires : le même calcul fait en utilisant un modèle linéaire, aurait donc abouti à une relation semblable entre w et WF. S'il devait s'avérer que l'échelle interne est une loi puissance, w devrait être corrigé par un facteur k (égal à l'exposant de l'échelle interne).

Au cours de notre résumé introductif, nous avons présenté plusieurs articles donnant une estimation de la valeur de la fraction de Weber comportementale pour des humains adultes et pour des animaux. Cette valeur se situait vers 0.3 pour les animaux, vers 0.2 pour les humains. En appliquant la transformation ci-dessus aux valeurs trouvées, on trouve une fraction de Weber interne w égale à 0.2 pour les animaux, à 0.1 pour les humains. Par ailleurs, dans leur article suscité Van Oeffelen et Vos [van Oeffelen and Vos, 1982] ont estimé directement la valeur de la fraction de Weber interne à 0.13 (voir pour les détails la table 4.1).

Règle du ratio

référence	formule	WF	tâche	w correspondant
	pour WF			
animaux				
[Emmerton et al., 1997]	2	0.32	catégorisation	0.24*
[Brannon and Terrace,	1	0.3* (2 sujets)	comparaison	0.22* (2 sujets)
2000]		2.0* (1 sujet)		1.48* (1 sujet)
[Brannon et al., 2001]	1	0.34*	soustraction et	0.25*
			comparaison	
[Nieder and Miller, 2003]	2,3	0.35	détection de changement	0.26*
adultes		I	1	I
[Taves, 1941]	1	0.17 - 0.24	comparaison	0.13* - 0.18*
[Newman, 1974]	1	0.10 - 0.13	comparaison (ré-	0.074* - 0.097*
		décroît avec N	ponses "plus",	
			"moins", "égal")	
[Van Oeffelen and Vos,	1	0.162	identification	0.1317 sur toutes
1982]				les données
				0.1080 sur un en-
				semble partiel de
				données
[Burgess and Barlow, 1983]	$\triangle N_T$ pro-	$\triangle N_T = kN^{0.75}$	catégorisation	
	portionnel	$WF = \frac{k}{N^{0.25}}$		
	à WF			
[Krueger, 1984]	2	0.081 - 0.126	comparaison	0.060* - 0.093*
		décroît avec N		
[Allik and Tuulmets, 1991]	1	0.133 - 0.168	comparaison	0.99* - 0.12*
		décroît avec N		
[Allik and Tuulmets, 1993]	1	0.16 - 0.18	comparaison	0.12* - 0.13*
$[Barth\ et\ al.,\ 2003]$	estimée à	0.28^* à travers les	comparaison (ex-	0.21^* à travers les
	partir de w	modalités	périence 4)	modalités
		0.23^* à l'intérieur		0.17^* à l'intérieur
		des modalités		des modalités
[Barth et al., 2005]	estimée à	0.26*	addition et com-	0.19
	partir de w		paraison	

Loi de la variabilité scalaire

référence	Cv	tâche		
animaux				
[Platt and Johnson, 1971], cité	0.4	production d'appuis		
dans [Gallistel and Gelman, 2000]				
enfants				
[Huntley-Fenner, 2001]	0.23 (0.11 - 0.37)	estimation sur nuages de points		
adultes				
[Whalen et al., 1999]	0.15 - 0.35	production d'appuis		
	0.10 - 0.25	estimation sur séquences de flashes		
[Cordes et al., 2001b]	0.2	production d'appuis		
[Dehaene and Marques, 2002]	0.15 pour les prix les moins variables	estimation de prix		

TAB. 4.1 – Valeurs de la fraction de Weber comportemental, de la fraction de Weber interne et du coefficient de variation relevées dans la littérature. La plupart des valeurs ont été relevées dans les articles en question, sauf celles qui sont marquées par une astérisque. Les valeurs de w marquées ont été calculées d'après la formule 4.1. Les valeurs de WF marquées ont été en général calculées depuis les graphiques publiés. Le numéro de la formule pour WF renvoie aux trois formules listées page 61.

4.3.5 Peut-on généraliser le modèle à une fraction de Weber non constante?

A la suite d'une série de mesures scrupuleuse des seuils de discriminabilité, Burgess et Barlow [Burgess and Barlow, 1983] ont découvert que ceux-ci ne sont pas à strictement parler proportionnels à la numérosité, en ce que le ratio $\frac{\text{seuil de discriminabilité}}{\text{numérosité}}$ (ce que l'on appelait originellement la fraction de Weber) diminue quand la numérosité croît. Selon leur estimation, le seuil de discriminabilité θ est de la forme $an^{0.75}$, ce qui correspond à une fraction de Weber (sens originel) de la forme $\frac{a}{n^{0.25}}$.

Est-il possible d'adapter notre modèle pour que ses prédictions suivent non la loi de Weber classique, mais cette loi plus fine, où la fraction de Weber diminue subtilement quand la numérosité augmente? Dans la suite, nous démontrons que le cadre Thurstonien n'est pas compatible avec cette actualisation de la loi de Weber. Ainsi, notre modèle n'est pertinent que si la loi de Weber est valide. On peut considérer que c'est approximativement le cas lorsqu'on travaille sur un intervalle de numérosités qui n'est pas trop étendu. En revanche, si l'on travaille sur un échantillon de stimuli trop large le modèle ne devrait pas rendre compte des données correctement. Du fait de cette restriction, il devrait également apparaître que la fraction de Weber interne w prend des valeurs plus faibles lorsque les numérosités considérées sont très élevées, puisque la valeur de w que l'on estime sera en fait la moyenne d'une fonction décroissante $\frac{a}{n^{0.25}}$.

Démonstration Burgess et Barlow ont mesuré la propriété suivante : la déviation qu'il faut ajouter à un stimulus de référence pour créer un nouveau stimulus qui soit discriminé du stimulus de référence avec un niveau de performance fixé, croît avec la numérosité en prenant la forme d'une fonction puissance $\theta = \alpha n^x$. Leurs mesures concernent un niveau de performance fixé à l'avance, de manière arbitraire, mais

nous considèrerons pour notre démonstration que le même résultat serait obtenu, quel que soit le niveau de performance considéré :

$$\forall p \in [0.5, 1[, \exists \alpha(p) \in [1, \infty[: \forall n, \text{discr}(n, \alpha(p)n^{x+1}) = p])$$

(où x est l'exposant mesurable sur les seuils de discriminabilité).

Première étape : on peut donner de cette propriété une version s'apparentant à la règle du ratio Cette partie de la démonstration est semblable à celle où nous démontrons l'équivalence entre la loi de Weber et la règle du ratio. Nous considérons les fonctions $\varphi_n : \alpha \mapsto \operatorname{discr}(n, \alpha n)$. Soit p un réel compris entre 0.5 et 1, nous pouvons définir $\alpha(p)$ qui vérifie la propriété discr $(n, \alpha(p)n^{x+1}) = p$ pour tout n. Si on applique φ_n à $\alpha(p)$, on obtient $\varphi_n(\alpha(p)) = \operatorname{discr}(n, \alpha(p)n) = p$. φ_n et α sont donc inverses l'une de l'autre, et comme les φ_n sont strictement croissantes, elles sont entièrement définies par la donnée d'une fonction inverse (α) . Par ailleurs, elles sont égales entre elles $(\varphi_n = \varphi)$. C'est à dire que nous avons, pour tout n: discr $(n, \alpha n^{x+1}) = \varphi(\alpha)$.

Une fois posé $p(\alpha) = \varphi(\alpha)$, nous avons ainsi démontré une sorte de "règle du ratio" pour notre nouvelle loi de Weber modifiée :

$$\forall \alpha \in [1, \infty[, \exists p(\alpha) \in [0.5, 1] : \forall n, \text{discr}(n, \alpha n^{x+1}) = p(\alpha).$$

Deuxième étape : démonstration de l'incompatibilité de la loi de Weber modifiée avec le cadre Thurstonien Partons de la propriété que nous venons de démontrer :

$$\forall \alpha \in [1, \infty[, \exists p(\alpha) \in [0.5, 1] : \forall n, \text{discr}(n, \alpha n^{x+1}) = p(\alpha).$$

En particulier, pour $\alpha = 1$: $\exists p(1) : \forall n, \text{discr}(n, n^{x+1}) = p(1)$. Appliquons cette dernière relation à n = 1, on a: p(1) = discr(1, 1) = 0.5. Ainsi, pour tout n, $\text{discr}(n, n^{x+1}) = 0.5$.

En se plaçant dans un cadre Thurstonien, où la dispersion des activations associées à chaque numérosité suit une loi gaussienne, ceci implique que les courbes d'activation de n et de n^{x+1} soient strictement confondues. On a $q_n = q_{n^{x+1}}$ pour tout n, ce qui implique que la fonction q soit constante : on tombe sur le cas particulier où les stimuli ne pourraient pas être discriminés les uns des autres, ce qui est une aberration.

4.4 Estimation et loi de la variabilité scalaire

En plus des deux formulations précédentes de la loi de Weber (loi de Weber originelle et règle du ratio), on trouve une troisième propriété sous la même appellation : il s'agit de la loi de la variabilité scalaire. Celle ci concerne les tâches d'estimation, où les sujets doivent produire une réponse quantitative. Dans ce cas, le coefficient de variation des réponses (écart type divisé par la moyenne) est constant sur tout l'intervalle de numérosités étudiés. Bien qu'elle en reçoive fréquemment le nom, cette dernière loi n'est pas directement relié à la loi de Weber, car elles concernent des tâches différentes (estimation et comparaison). Cependant,

nous montrerons ci-après que nos trois échelles internes de numérosité, qui sont compatibles avec la loi de Weber, prédisent aussi la loi de la variabilité scalaire, une fois qu'on a formulé des hypothèses simples sur la manière dont les estimations sont réalisées. Il s'agit d'une étape cruciale pour la validation de notre modèle : comme la loi de Weber, la loi de la variabilité scalaire a été observée à de nombreuses reprises, et chez des populations variées : animaux [Platt and Johnson, 1971], humains enfants [Huntley-Fenner, 2001] et adultes [Whalen et al., 1999, Cordes et al., 2001a] (voir paragraphe 2.4).

4.4.1 Notations

La table suivante liste les abréviations utilisées dans la suite du texte.

q_n	échelle de la ligne numérique interne; position moyenne de l'activation après
	un stimulus de numérosité n
w_n	écart-type de la distribution des activations sur la ligne numérique pour une
	stimulus de numérosité n
$c_{-}(R), c_{+}(R)$	citères délimitant à gauche et à droite la partie de la ligne numérique associée
	à la réponse R
R(n)	réponse moyenne à un stimulus de numérosité n dans la situation optimale de
	référence, avec la grille de réponse optimale formée des critères $c(R)$ et $c_+(R)$
$R_{a,b}(n)$	réponse moyenne à un stimulus de numérosité n après avoir étiré la grille de
	réponse d'un facteur a , et l'avoir décalée de b

4.4.2 Étude d'un modèle de référence

Stratégie optimale définie par le maximum de vraisemblance

Dans la tâche d'estimation que nous avons étudiée, le sujet doit estimer combien de points contient un nuage. Les seules réponses autorisées sont les nombres ronds, c'est-à-dire dans notre cas précis les dizaines. Comment modéliser cette tâche à partir de l'idée de la ligne numérique interne? A chaque essai, lorsqu'on présente un nuage de numérosité n, ce stimulus active la ligne numérique interne en un point x, et l'observateur infère la valeur de la numérosité à partir de cette activation.

Afin de formuler notre modèle de l'estimation, nous commençons par étudier un modèle de référence, où les performances sont optimales (nous définissons ci-dessous ce que nous entendons par là de manière rigoureuse). Connaissant les contraintes, le bruit interne au système de représentations de la numérosité, quelle faudrait-il stratégie employer pour minimiser l'écart entre les réponses données et un comportement parfait, où toutes les réponses seraient correctes? Dans un deuxième temps, nous utiliserons cette description du scénario optimal pour modéliser le comportement des sujets : en quoi ceux-ci dévient-ils de la situation optimale? Nous donnerons un modèle (à notre sens, le plus simple possible) où le comportement reste très proche, à deux paramètres près, de la stratégie optimale.

Qu'entendons-nous par stratégie optimale? La stratégie du maximum de vraisemblance, que nous avons introduite plus haut, fournit une première méthode pour approcher le comportement optimal. Cette stratégie préconise que, ayant observé une activation sur la ligne numérique interne, on choisisse le nombre qui a le plus de chance d'avoir mené à cette observation, parmi toutes les alternatives possibles. Comme nous l'avons vu, ceci revient à choisir le nombre qui correspond à la courbe d'activation qui est au-dessus de toutes les autres à l'endroit où on a observé une activation. En adoptant cette stratégie, on maximise le pourcentage de réponses correctes, soit la probabilité de répondre '40' quand effectivement un stimulus de numérosité 40 a été présenté.

Concrètement, cette stratégie revient à placer des critères sur la ligne numérique interne. Ceux-ci, placés aux points d'intersections entre les courbes d'activations des différentes numérosités, partagent la ligne numérique en une suite d'intervalles associés aux différentes réponses possibles. Nous dirons qu'ils définissent une grille de réponse sur la ligne numérique. Pour illustrer cette idée, considérons notre expérience où la consigne indique de répondre avec un nombre rond : '10', '20', '30', '40', etc. Sur la figure 4.3 sont représentées les courbes d'activation correspondant à ces différents nombres, avec leur point d'intersection, ainsi que les intervalles sur la ligne interne correspondant aux différentes réponses. En observant la figure, deux remarques peuvent être formulées :

- A mesure que les nombres grandissent la probabilité de fournir une réponse correcte (probabilité de répondre 'N' quand effectivement N items ont été présentés) s'amenuise. A titre d'exemple, pour N = 80 et w = 0.2, cette probabilité est de l'ordre de 25%.
- Dans le cas des échelles linéaire et puissance, on voit que les points d'intersection des courbes se décalent de plus en plus vers la gauche par rapport aux pics des courbes, tant et si bien qu'au-delà de N = 170, le pic de la distribution pour la numérosité N se situe en dehors du segment associé à la réponse 'N'. Notre stratégie optimale conduit donc les sujets à sur-estimer : si l'on considère le pic de la courbe de d'activation associée à une numérosité N, il est associé à la réponse 'N+10'.

Au vu de ces considérations, nous avons choisi d'abandonner la stratégie du maximum de vraisemblance. Il apparaît en effet peu efficace d'optimiser la probabilité de fournir une réponse strictement correcte, si cette probabilité doit rester bien faible; de plus répondre '60' après que 70 points ont été présentés est une erreur moins grave que '40', ce que le maximum de vraisemblance ne prend pas en compte. Une bonne manière de procéder, qui intègre la distance de chaque réponse à la réponse correcte, serait de travailler sur la réponse moyenne, en cherchant à définir un mécanisme qui rapproche la réponse moyenne de la valeur réelle du stimulus.

Modèle de sélection de la réponse par arrondi

Afin de minimiser les source de biais sur la réponse moyenne, nous proposons de considérer un modèle très simple : lorsqu'une activation est enregistrée sur la ligne numérique interne, la réponse choisie correspond au nombre associé au point q_n le plus proche de l'activation observée sur la ligne numérique. En somme, il s'agit d'arrondir la valeur de l'activation à la numérosité la plus proche. Chaque point q_n est associé à la

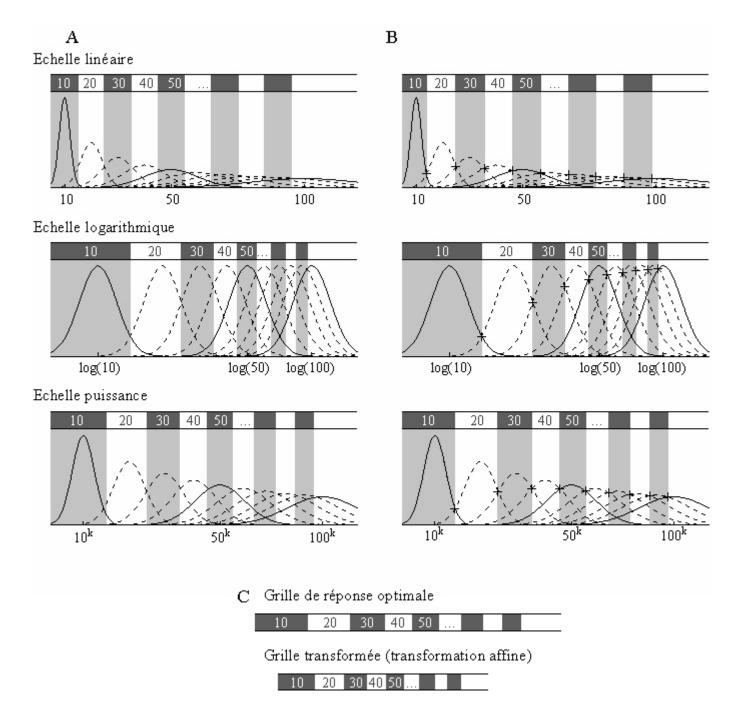


FIG. 4.3 – Définition des critères de réponses, selon la stratégie du maximum de vraisemblance (A), ou d'arrondi (B), pour une échelle linéaire (q(n) = n), logarithmique $(q(n) = \log(n))$ ou puissance $(q(n) = n^k)$. Dans le cas du maximum de vraisemblance, les critères sont placés au niveau des points d'intersection des courbes. Dans le cas de l'arrondi, les critères sont situés au milieu des segments $[q_n, q_{n+10}]$. C. Application d'une transformation affine à la grille de réponse : la grille transformée est à la fois compressée (ou étirée) et décalée par rapport à la grille optimale, et toutes les réponses s'en trouvent décalées.

réponse 'n'; si l'activation tombe entre q_n et q_{n+10} , on choisit n si elle se situe sur la gauche du segment, n+10 si elle est à droite. Comme la méthode du maximum de vraisemblance, cette stratégie définit donc une liste de critères sur la ligne numérique, qui la séparent en plusieurs segments associés aux différentes réponses (voir figure 4.3). Dans la suite, les deux critères délimitant la partie de la ligne numérique associée avec la réponse R seront notés $c_{-}(R)$ et $c_{+}(R)$.

La probabilité que le sujet donne la réponse R face à un stimulus de numérosité n correspond à l'intégrale de la courbe d'activation correspondant à la numérosité n, prise entre les points $c_{-}(R)$ et $c_{+}(R)$:

$$P(R|n) = \int_{c_{-}(R)}^{c_{+}(R)} \operatorname{Gauss}(q_{n}, w_{n}),$$

où les critères sont donnés par les relations suivantes :

$$c_{-}(R) = \frac{1}{2}(q_R + q_{R-10})$$

$$c_{+}(R) = \frac{1}{2}(q_R + q_{R+10})$$

(ils sont situés à égale distance des points associés à R et R-10 (resp R+10)).

Valeur de la réponse moyenne dans le cas où la réponse est arrondie au nombre voisin Nous avons dit plus haut qu'une stratégie serait qualifiée d'optimale si elle conduisait à produire des réponses égales en moyenne à la numérosité présentée. Dans cette section, nous vérifions que notre modèle décrit une stratégie optimale en calculant la valeur de la réponse moyenne selon les trois alternatives d'échelle interne.

La formule générale qui donne la valeur de la réponse moyenne pour un stimulus de numérosité n s'écrit de la manière suivante :

$$\langle R \rangle_n = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \text{Gauss}(q_n, w_n, x) dx,$$

où R(x) est la réponse associée avec le stimulus x.

R(x) est normalement un nombre entier rond, mais pour simplifier les calculs nous utilisons q^{-1} , qui en donne une valeur approchée (non-entière). En effet, lorsque n est un nombre rond, $R(q_n)$ est égale à n; interpolant cette relation, nous remplaçons donc R(x) par la fonction q^{-1} , inverse de q.

Ainsi, nous repartons de l'équation précédente, que nous appliquons aux différents cas :

Échelle linéaire : $q_n = n, q^{-1}(x) = x$

$$\langle R \rangle_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x \text{Gauss}(n, wn, x) dx$$

= n .

Échelle logarithmique : $q_n = \log(n), q^{-1}(x) = e^x$

$$\begin{split} \langle R \rangle_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \text{Gauss}(\log(n), w, x) \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} \exp\left(-\frac{(x - \log(n))^2}{2w^2} + x\right) \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} \exp\left(-\frac{(x^2 - 2x \log(n) + \log^2(n) - 2w^2x)}{2w^2}\right) \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} \exp\left(-\frac{(x - (\log(n) + w^2))^2 - (\log(n) + w^2)^2 + \log^2(n)}{2w^2}\right) \, dx \\ &= \exp\left(-\frac{(\log(n) - \log(n) - w^2) \left(\log(n) + \log(n) + w^2\right)}{2w^2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{w^2 \left(2\log(n) + w^2\right)}{2w^2}\right) \\ &= \exp\left(\log(n) + \frac{w^2}{2}\right) \\ &= ne^{\frac{w^2}{2}}. \end{split}$$

Échelle puissance : $q_n = n^k$, $q^{-1}(x) = x^{\frac{1}{k}}$

$$\langle R \rangle_n = \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{k}} Gauss \left(n^k, w n^k, x \right) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{k}}}{\sqrt{2\pi} w n^k} \exp\left(-\frac{\left(x - n^k \right)^2}{2w^2 n^{2k}} \right) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{n x^{\frac{1}{k}}}{\sqrt{2\pi} w n^k} \exp\left(-\frac{\left(x n^k - n^k \right)^2}{2w^2 n^{2k}} \right) n^k dx$$

$$= n \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{k}}}{\sqrt{2\pi} w} \exp\left(-\frac{\left(x - 1 \right)^2}{2w^2} \right) dx$$

$$= n I(w, k)$$

Ainsi donc, dans le cas de l'échelle linéaire, la réponse moyenne est égale à la valeur du stimulus ; dans le cas de l'échelle logarithmique, les réponses sont très légérement supérieures en moyenne à la valeur du stimulus. On trouve en effet un facteur $e^{\frac{w^2}{2}}$, proche de 1 (pour w=0.2, $e^{\frac{w^2}{2}}=1.02$). Pour l'échelle puissance, nous nous sommes contenté de vérifier que les réponses sont proportionnelles aux stimuli, sans avoir pu donner la valeur du coefficient de proportionnalité.

4.4.3 Modèle de la tâche d'estimation

Maintenant que nous avons modélisé les performances optimales dans une tâche d'estimation, il nous reste à définir en quel sens le comportement réel des sujets dévie par rapport à ce cadre optimal. Afin de réduire le nombre de paramètre libres dans notre modèle, nous postulons que les sujets utilisent non la grille

de réponse optimale telle qu'on vient de la décrire, mais une transformée affine de celle-ci. Notre modèle suppose donc que les sujets ne sont pas très loin de la stratégie optimale, puisqu'ils savent quelle forme doit avoir la liste des critères (suite linéaire pour une échelle linéaire, suite logarithmique pour une échelle logarithmique, suite puissance pour une échelle puissance). Par contre, ils peuvent se tromper en évaluant l'unité dans laquelle leur ligne interne est 'graduée' : fixer une transformation affine revient à déterminer où se trouve le point 0 sur la ligne, et quelle distance sépare les points 0 et 1.

Maintenant que le modèle a été posé, nous allons procéder à l'étape de validation. Le modèle que nous venons de décrire est-il en accord avec les données de la littérature? Nous montrons ci-dessous qu'il prédit que les réponses suivent une loi de variabilité scalaire, et en cela il permet d'expliquer tout un ensemble de résultats.

4.4.4 Démonstration de la compatibilité du modèle avec la loi de la variabilité scalaire

Soit $p_n(s \in [x, y])$ la probabilité d'observer une activation sur la ligne numérique interne entre les points x et y, après un stimulus de numérosité n. La première étape de notre démonstration consiste à montrer que les p_n s vérifient les équations suivantes :

échelle logarithmique:

$$p_n\left(s \in [x,y]\right) = p_{\alpha n}\left(s \in [x + \log(\alpha), y + \log(\alpha)]\right) \tag{4.2}$$

Il suffit pour s'en convaincre de noter que :

$$p_n(s \in [x, y]) = \int_x^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} \exp\left(-\frac{(u - \log(n))^2}{2w^2}\right) du.$$
et
$$p_{\alpha n}(s \in [x + \log(\alpha), y + \log(\alpha)]) = \int_{x + \log(\alpha)}^{y + \log(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} \exp\left(-\frac{(u - \log(n) - \log(\alpha))^2}{2w^2}\right) du$$

Ces deux quantités sont égales lorsqu'on applique à la deuxième le changement de variable $v = u - \log(\alpha)$ près.

échelles linéaire et puissance :

$$p_n\left(s \in [x, y]\right) = p_{\alpha n}\left(s \in \left[\alpha^k x, \alpha^k y\right]\right) \tag{4.3}$$

Ici encore cette relation apparaît en explicitant ces deux quantités :

$$p_n(s \in [x, y]) = \int_x^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}wn^k} \exp\left(-\frac{(u - n^k)^2}{2w^2n^{2k}}\right) du$$
$$p_{\alpha n}(s \in \left[\alpha^k x, \alpha^k y\right]) = \int_{\alpha^k x}^{\alpha^k y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}w\alpha^k n^k} \exp\left(-\frac{(u - \alpha^k n^k)^2}{2w^2\alpha^{2k}n^{2k}}\right) du$$

la deuxième peut aisément être égalisée avec la première en appliquant le changement de variable $v=\frac{u}{a}$.

Dans la suite, pour simplifier les équations, nous raisonnerons sur des réponses à valeur dans un espace continu. De fait, le résultat que nous allons obtenir n'est valable que de manière approchée pour des réponses

entières; il ne devrait pas être affecté dès que l'on considère des grands nombres, mais pourra être différent dans le domaine des petits nombres. Plaçons nous dans la situation optimale de référence : le point q_n est associé avec la réponse 'n', ainsi que tout un segment situé de part et d'autre de q_n . Nous travaillons ci-après sur une approximation continue de la fonction q qui à une numérosité (réelle) associe un point sur la ligne numérique.

Selon notre modèle, les réponses d'un sujet (qui n'applique que partiellement notre stratégie optimale) sont obtenues en appliquant une transformation affine à l'ensemble des critères. Le point qui est associé à la réponse R n'est plus q(R) mais son transformé s = a * q(R) + b, où a et b sont les deux paramètres de cette transformation affine. En exploitant cette dernière équation, on peut trouver la relation entre un point de la ligne numérique et sa réponse associée :

échelle logarithmique : $s = a * \log(R) + b$ et donc $R = \exp(\frac{s-b}{a}) = \gamma \exp(\frac{s}{a})$; échelle linéaire : s = a * R + b et donc $R = \frac{s-b}{a}$; échelle puissance : $s = a * R^k + b$ et donc $R = (\frac{s-b}{a})^{\frac{1}{k}}$.

Lorsqu'on considère des nombres grands, la valeur de b devient négligeable devant s et on peut donc approximer les équations précédentes comme suit :

échelle linéaire : $R = \frac{s}{a}$ échelle puissance : $R = (\frac{s}{a})^{\frac{1}{k}}$

A l'aide des relations précédentes, nous pouvons réécrire les équations 4.2 et 4.3 en termes de probabilité pour un stimulus d'être associé avec un intervalle de réponses (et non plus un intervalle sur la ligne numérique) : échelle logarithmique :

$$p_n\left(R \in \left[\gamma \exp(\frac{x}{a}), \gamma \exp\left(\frac{y}{a}\right)\right]\right) = p_{\alpha n}\left(R \in \left[\gamma \alpha^{\frac{1}{a}} \exp\left(\frac{x}{a}\right), \gamma \alpha^{\frac{1}{a}} \exp\left(\frac{y}{a}\right)\right]\right)$$

soit en d'autres termes

$$p_n\left(R \in [R_1, R_2]\right) = p_{\alpha n}\left(R \in \left[\alpha^{\frac{1}{a}} R_1, \alpha^{\frac{1}{a}} R_2\right]\right) \tag{4.4}$$

échelles linéaire et puissance :

$$p_n\left(R \in \left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{k}}, \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{k}}\right]\right) = p_{\alpha n}\left(R \in \left[\alpha\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{k}}, \alpha\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{k}}\right]\right)$$

soit en d'autres termes

$$p_n(R \in [R_1, R_2]) = p_{\alpha n}(R \in [\alpha R_1, \alpha R_2]).$$
 (4.5)

Enfin nous pouvons donner une version générique des équations 4.4 et 4.5 en introduisant une notation commune D:

$$p_n(R \in [R_1, R_2]) = p_{\alpha n}(R \in [DR_1, DR_2])$$
 (4.6)

(où $D = \alpha^{\frac{1}{a}}$ dans le cas d'une échelle logarthmique, et $D = \alpha$ dans le cas d'une échelle puissance ou linéaire).

Nous dérivons ensuite l'équation précédente pour obtenir la densité de probabilité d'observer la réponse R face au stimulus n:

$$p_n(R) = p_{\alpha n}(DR)R.$$

La loi de la variabilité scalaire découle assez facilement de la relation précédente :

$$\langle R \rangle_{a,b} (\alpha n) = \int R p_{\alpha n}(R) dR$$

$$= \int R \frac{1}{D} p_n \left(\frac{R}{D}\right) dR$$

$$= \int u p_n(u) D du$$

$$= D \langle R \rangle_{a,b} (n)$$

De la même façon,

$$var R(\alpha n) = D^2 var R(n),$$

et il s'ensuit que le coefficient de variation est constant :

$$Cv(\alpha n) = \frac{\text{\'ecart-type}(\alpha n)}{\langle R \rangle_{a,b} (\alpha n)} = Cv(n).$$

Conclusion La démonstration précédente ne montre pas que la loi de Weber et la loi de la variabilité scalaire sont équivalentes. A vrai dire, il serait difficile de démontrer une telle relation entre les deux, car elles concernent des tâches différentes : l'une (la loi de Weber) décrit les scores dans une tâche de comparaison, l'autre (la loi de la variabilité scalaire) rend compte des réponses dans une tâche d'estimation. Pour relier les deux, il est nécessaire de donner un modèle du mécanisme à l'oeuvre dans ces deux types de tâches : c'est ici qu'intervient notre modèle de la ligne numérique. Nous avons montré que la loi de la variabilité scalaire est valide dans le cadre de notre modèle, dont la loi de Weber est une des prémices (puisque nous avons adapté le niveau de bruit en sorte que les prédictions de notre modèle suivent la loi de Weber).

4.4.5 Valeur de coefficient de variation

Comme la loi de la variabilité scalaire a souvent été confondue avec la loi de Weber, le coefficient de variation, à valeur constante selon la loi de la variabilité scalaire, a été donnée comme valeur de la fraction de Weber [Dehaene and Marques, 2002]. Nous détaillons ci-dessous la valeur du coefficient de variation : celui-ci n'est égal à la fraction de Weber interne w que dans le cas optimal de référence (pas de transformation affine). En effet on trouve les résultats suivants :

échelle logarithmique :
$$Cv = \frac{w}{a} (Cv = w \text{ si } a = 1).$$

échelle linéaire : $Cv = \frac{w}{1-b} (Cv = w \text{ si } b = 0).$

Enfin dans le cas d'une échelle puissance, nous n'avons pas pu obtenir de formule simple.

Détail des calculs Comme on l'a vu, le coefficient de varition est constant, il suffit donc de calculer sa valeur pour n=1. Ici encore nous nous servons de l'approximation des réponses continues. Nous reprenons les équations reliant chaque point s sur la ligne numérique à la réponse $R_{a,b}$ qui lui est associée $(R=q^{-1}\left(\frac{x-b}{a}\right))$.

échelle logarithmique

réponse moyenne pour n=1

$$\langle R \rangle_{a,b} (1) = \int \exp\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} \exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} \exp\left(-\frac{x^2 - \frac{2w^2}{a}x + \frac{2w^2b}{a}}{2w^2}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{w^2}{a}\right)^2 + \frac{2w^2b}{a} - \frac{w^4}{a^2}}{2w^2}\right) dx$$

$$= \exp\left(-\frac{b}{a} + \frac{w^2}{2a^2}\right).$$

variance pour n=1

$$\langle R^2 \rangle_{a,b} (1) = \int \exp\left(\frac{2x - 2b}{a}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} \exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} \exp\left(-\frac{x^2 - \frac{4w^2}{a}x + \frac{4w^2b}{a}}{2w^2}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{2w^2}{a}\right)^2 + \frac{4w^2b}{a} - \frac{4w^4}{a^2}}{2w^2}\right) dx$$

$$= \exp\left(-\frac{2b}{a} + \frac{2w^2}{a^2}\right).$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}_{a,b}(1) &= \left\langle R^2 \right\rangle_{a,b}(1) - \left\langle R \right\rangle_{a,b}^2(1) \\ &= \exp\left(-\frac{2b}{a} + \frac{2w^2}{a^2}\right) - \exp\left(-\frac{2b}{a} + \frac{w^2}{a^2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{2b}{a} + \frac{w^2}{a^2}\right) \left(\exp\left(\frac{w^2}{a^2}\right) - 1\right) \end{aligned}$$

$$\operatorname{\acute{e}cart_type}_{a,b}(1) = \sqrt{\operatorname{Var}_{a,b}(1)} = \exp\left(-\frac{b}{a} + \frac{w^2}{2a^2}\right)\sqrt{\exp\left(\frac{w^2}{a^2}\right) - 1}.$$

coefficient de variation

$$\begin{aligned} \operatorname{Cv}_{a,b}(1) &= \frac{\operatorname{\acute{e}cart_type}_{a,b}(1)}{\langle R \rangle_{a,b}(1)} \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{b}{a} + \frac{w^2}{2a^2}\right)\sqrt{\exp\left(\frac{w^2}{a^2}\right) - 1}}{\exp\left(-\frac{b}{a} + \frac{w^2}{2a^2}\right)} \\ &= \sqrt{\exp\left(\frac{w^2}{a^2}\right) - 1} \\ &\approx (\frac{w^2}{a^2})^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{w}{a}. \end{aligned}$$

échelle linéaire

réponse moyenne pour n=1

$$\langle R \rangle_{a,b} (1) = \int \frac{x-b}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2w^2}\right) dx$$

$$= \int \frac{x-b+1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} \exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}wa} x \exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right) dx + \int \frac{1-b}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} \exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right) dx$$

$$= \frac{w}{\sqrt{2\pi}a} \int \frac{x}{w^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right) dx + \frac{1-b}{a}$$

$$= \frac{w}{\sqrt{2\pi}a} \left[\exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right)\right] + \frac{1-b}{a}$$

$$= \frac{1-b}{a}.$$

variance pour n=1

$$\langle R^2 \rangle_{a,b} (1) = \int (\frac{x-b}{a})^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2w^2}\right) dx$$

$$= \int (\frac{x-b+1}{a})^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} \exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right) dx$$

$$= \int \frac{x^2}{a^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} \exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right) dx + \int \frac{2x(-b+1)}{a^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} \exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right) dx$$

$$+ \int \frac{(1-b)^2}{a^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} \exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{xw}{a^2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right)\right] + \int \frac{w}{a^2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right) dx + 0 + \frac{(1-b)^2}{a^2}$$

$$= 0 + \frac{w^2}{a^2} + 0 + \frac{(1-b)^2}{a^2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}_{a,b}(1) &= & \left\langle R^2 \right\rangle_{a,b}(1) - \left\langle R \right\rangle_{a,b}^2(1) \\ &= & \frac{w^2}{a^2} + \frac{(1-b)^2}{a^2} - \frac{(1-b)^2}{a^2} = \frac{w^2}{a^2}. \end{aligned}$$

$$\operatorname{\acute{e}cart_type}_{a,b}(1) = \sqrt{\operatorname{Var}_{a,b}(1)} = \frac{w}{a}.$$

coefficient de variation

$$\begin{aligned} \operatorname{Cv}_{a,b}(1) &=& \frac{\operatorname{\acute{e}cart_type}_{a,b}(1)}{\langle R \rangle_{a,b}(1)} \\ &=& \frac{\frac{w}{a}}{\frac{1-b}{a}} \\ &=& \frac{w}{1-b}. \end{aligned}$$

\dot{RESUME} - Modèle mathématique de la ligne numérique interne - 1/2

Supposons qu'un nombre N est perçu; que ce soit sous la forme symbolique (mot 'quatre', chiffre 4) ou non-symbolique (ensemble de numérosité 4), ce stimulus est représenté sous la forme d'une grandeur interne analogue à la quantité numérique. On dira que le nombre est représenté sur une ligne interne, que cette ligne est activée en un point x. D'un essai à l'autre, le point où tombe l'activation varie : la dispersion des activations pour un stimulus n suit une loi normale centrée sur q_n et d'écart type w_n . Nous considérons trois alternatives pour q_n et w_n , issues de la littérature :

échelle interne	$\mathbf{q_n}$	$\mathbf{w_n}$
logarithmique	$\log(n)$	w
linéaire	n	wn
puissance	n^k	wn^k

Les paragraphes suivant détaillent comment nous modèlisons la prise de décision permettant de choisir une réponse dans différents contextes.

Tâches à réponses non-numériques

Ici nous considérons un ensemble de tâches dans les réponses ne sont pas des nombres; dans cette catégorie on trouve par exemple la tâche de comparaison (réponses 'plus grand' / 'plus petit'), et la tâche de détection de changement (réponses 'identique' / 'différent').

Soit $S_{'A'}$ l'ensemble des stimuli associés à la réponse correcte 'A', $S_{'B'}$ les stimuli associés à la réponse 'B', etc. On peut définir la distribution des activations engendrées sur la ligne numérique par ces différents groupes de stimuli :

$$\begin{array}{lcl} p_{'\mathrm{A'}}(x) & = & \displaystyle \sum_{S_{'\mathrm{A'},i} \in S_{'\mathrm{A'}}} p\left(S_{'\mathrm{A'},i}\right) \mathrm{Gauss}\left(q_{S_{'\mathrm{A'},i}}, w_{S_{'\mathrm{A'},i}}, x\right) \\ p_{'\mathrm{B'}}(x) & = & \displaystyle \sum_{S_{'\mathrm{B'},i} \in S_{'\mathrm{B'}}} p\left(S_{'\mathrm{B'},i}\right) \mathrm{Gauss}\left(q_{S_{'\mathrm{B'},i}}, w_{S_{'\mathrm{B'},i}}, x\right) \\ & \dots \end{array}$$

Les courbes $p_{A'}$, $p_{B'}$, etc, se coupent en un certain nombre de points qui définissent des critères sur la ligne numérique. Ces critères partagent la ligne en un certain nombre de segments : la réponse associée à chaque segment est celle dont la courbe est au-dessus de toutes les autres sur ce segment-là.

\dot{RESUME} - Modèle mathématique de la ligne numérique interne - 2/2

Tâches à réponses numériques

Ici nous considérons les tâches dont la réponse est un nombre. La plus simple de ces tâches est l'estimation numérique : un stimulus est présenté sous forme non symbolique, et le sujet doit en donner une estimation sous forme symbolique. Mais on peut envisager des situations plus complexes employant ce type de réponse. Ainsi, nous étudierons dans la suite une tâche de soustraction non-symbolique où les réponses doivent être nommées oralement.

Là encore, nous définissons une liste de critères sur la ligne numérique ; ces critères délimitent des segments associés avec les différentes réponses possibles. La liste des critères est construite comme suit en deux étapes :

- 1. On place un critère juste au milieu entre les points associés à deux réponses adjacentes (par exemple q_n et q_{n+1}). Ceci revient à associer avec la réponse 'n' l'ensemble des points qui sont plus proches de q_n que de tout autre q_p . La liste de critères ainsi construite définit une grille de réponse sur la ligne numérique.
- 2. La grille est soumise à une transformation affine : c'est-à-dire qu'elle est à la fois étirée (ou compressée), et décalée vers la droite ou la gauche. Consécutivement, après cette deuxième étape, le point q_n n'est pas nécessairement associé à la réponse 'n'. Le fait d'introduire une transformation affine permet de rendre compte de ce que les sujets ne sont pas spontanément calibrés : en l'absence d'indication, ils ne savent pas quel nombre associer à quelle quantité.

Propriétés du modèle

Ainsi construit, notre modèle prédit à la fois la règle du ratio (le taux de réponses correctes pour discriminer deux stimuli dépend exclusivement du ratio entre ces deux stimuli), et la loi de la variabilité scalaire (dans l'estimation, la réponse moyenne est proportionnelle à l'écart type des réponses). De fait, il permet d'expliquer une grande partie des données de la littérature. Ce modèle permet de créer un lien entre le comportement en comparaison et en estimation. Forts de ce lien, nous proposons de remplacer la fraction de Weber comportementale, paramètre traditionnellement utilisé pour mesurer la précision de la représentation interne de numérosité, mais subordonné à l'utilisation d'une tâche de comparaison, par le paramètre w intervenant dans notre modèle, et que nous nommons fraction de Weber interne.

Chapitre 5

Validation expérimentale du modèle : tests psychophysiques

Ce chapitre présente un ensemble de validations expérimentales du modèle de la ligne numérique. Nous appliquons les trois modèles (échelles logarithmique, linéaire ou puissance) à un ensemble de tâches expérimentales, et confrontons les données aux prédictions pour répondre à ces trois questions :

- les équations du modèles captent-elles bien la forme des courbes de performance? Nous avons vu que le modèle prédit la loi de Weber, et la loi de la variabilité scalaire, mais s'accorde-t-il à tous les aspects des tâches que nous étudions?
- peut-on, à partir des données, estimer la valeur des paramètres libres du modèle? En premier lieu, nous cherchons ainsi la valeur de la fraction de Weber interne w qui mesure la dispersion des activations sur la ligne numérique. Dans le cas d'une échelle puissance, il nous faut aussi estimer la valeur de l'exposant k. Enfin, dans le cas où on utilise une réponse verbale, il nous faut également estimer les deux paramètres a et b de la transformation affine appliquée aux critères de réponse.
- peut-on, sur la base des données expérimentales, départager les trois hypothèses d'échelle interne?

5.1 Comparaison et détection de changement sur des numérosités¹

5.1.1 Méthodes expérimentales

Tâche de détection de changement (jugement 'pareil'/'différent')

Huit volontaires sains (âge moyen 29 ans) ont passé cette expérience. Chaque essai commençait par une croix de fixation pendant 1050 ms, puis quatre nuages de points étaient présentés successivement pendant 150 ms, au rythme d'une image toutes les 1200 ms. Les trois premiers nuages contenaient tous le même nombre de points, soit 16 ou 32 selon les blocs. Le quatrième stimulus pouvait dévier numériquement des trois premiers d'un ratio de 1.25, 1.5, ou 2, et pouvait contenir selon les essais soit plus soit moins d'items que la référence. Dans 25% des essais au contraire, le quatrième stimulus était de la même numérosité que les

¹Les travaux exposés dans cette section ont été publiés sous la référence [Piazza et al., 2004].

stimuli de référence. Par ailleurs, les items constituant le quatrième stimulus pouvait être de la même forme (points) ou d'une forme différente (triangles) par rapport aux stimuli de référence, en sorte que les deux facteurs de changement de forme et de changement de numérosité soient orthogonaux (voir figure 5.1). Juste après le quatrième nuage, un point d'interrogation apparaissait et restait présent sur l'écran jusqu'à ce que le sujet ait indiqué, par un appui sur la touche appropriée, si il jugeait que la numérosité avait changé dans le dernier nuage. A chaque essai, nous indiquions au sujet si sa réponse était correcte. Avant que l'expérience ne commence, les volontaires étaient informés que parmi les essais, 75% allaient contenir un changement de numérosité. Au total, nous avions 4 blocs de 48 essais chacun.

Tâche de comparaison

Huit autres volontaires (âge moyen 26 ans) ont été soumis à ce test. Comme pour la tâche précédente, à chaque essai quatre stimuli étaient présentés : les trois premiers avaient tous la même numérosité (16 ou 32 selon le bloc) et le quatrième différait toujours en numérosité des trois autres (voir figure 5.1). Les participants devaient indiquer si ce dernier stimulus contenait plus ou moins d'items que les autres. Comme les performances à cette tâche sont globalement meilleures qu'à la tâche de détection de changement précédente, nous avons utilisé des numérosités déviantes plus proches de la référence que dans l'expérience précédente. Ainsi les numérosités déviantes étaient égales à 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19 et 20 pour la référence 16 ; lorsque la référence était 32 nous avons utilisé les doubles des quantités précédentes. Les numérosités déviantes étaient donc distribuées régulièrement autour de la valeur de référence.

Cette expérience comportait 8 blocs de 40 essais (4 blocs avec 16 comme référence, 4 blocs avec 32). Les paramètres temporels étaient strictement identiques à ceux de l'expérience précédente, et de même nous indiquions à chaque essai si la réponse était correcte. Dans la moitié des essais, la forme des items était modifiée (triangles au lieu de points), soit au niveau du stimulus test, soit au niveau des trois stimuli de référence (mais jamais simultanément sur les 4 stimuli).

Génération des stimuli

Les stimuli étaient construits en sorte que, mis à part le fait que la numérosité change, tous les stimuli tests présentent le même degré de nouveauté par rapport aux stimuli de référence, quelle que soit la dimension considérée (voir figure 5.2). Nous avons généré deux groupes de stimuli (stimuli H et T). La luminance totale (somme des aires de tous les items) et l'espace occupé sur l'écran (aire de l'enveloppe convexe des items) étaient approximativement égales pour tous les stimuli de type T : par suite, pour les stimuli de type T, la taille des items diminuait avec la numérosité et la densité (nombre d'items par unité de surface) augmentait. Au contraire, la valeur de ces deux derniers paramètres variait aléatoirement pour les stimuli de type H, en sorte que, en moyenne, ils étaient les mêmes pour toutes les numérosités. Le tirage aléatoire était fait en sorte que, pour chaque numérosité, ces deux paramètres prennent pour les stimuli H tout l'intervalle de valeurs qu'ils prenaient pour les stimuli T de différentes numérosités. Nous avons généré automatiquement les stimuli suivant les contraintes décrites ci-dessus, en sorte qu'aucune image ne soit présentée plusieurs fois

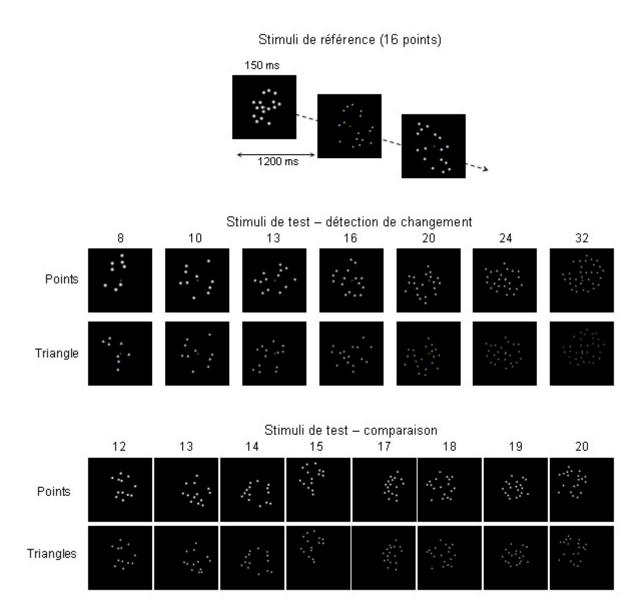


FIG. 5.1 – Paradigme expérimental. A chaque essai, trois stimuli de référence de même numérosité (16 ou 32) étaient présentés successivement, suivis d'un stimulus test. Le sujet devait dire si le stimulus test était identique en numérosité aux stimuli de référence (tâche de détection de changement), ou dire s'il contenait plus ou moins d'éléments que les stimuli de référence (tâche de comparaison). La plupart du temps, le stimulus était constitué de points, mais de temps en temps les éléments étaient des triangles. Seuls les stimuli de test pouvaient être constitués de triangle pour la tâche de détection de changement; par contre pour la comparaison, il pouvait s'en trouver également au niveau des stimuli de référence.

au cours de l'expérience.

Pour la tâche de détection de changement, les trois stimuli de référence étaient systématiquement de type H, et le stimulus sur lequel portait la question était de type T. Les contraintes que nous avons mises sur le dessin des stimuli veillaient à ce que les réponses ne puissent être devinées sur la base d'aucun paramètre physique de bas niveau. Sur tous les stimuli T, la luminance totale et l'espace occupé sur l'écran étaient constants : ces deux paramètres ne permettaient donc pas de fournir de réponse pertinente sur la numérosité. Quant à la taille des items, et à la densité, ils étaient corrélés avec la numérosité pour les stimuli T, mais variaient constamment pour les stimuli H, en sorte qu'ils n'était pas possible pour le sujet de s'y fier pour répondre. Toutes les valeurs prises par ces paramètres sur les stimuli T avaient donc été présentées au préalable sur un stimuli H, et toutes apparaissaient aussi peu nouvelles les unes que les autres.

A titre de contrôle supplémentaire, nous avons parfois inversé les rôles des stimuli H et T pour l'expérience de comparaison. Pour la moitié des essais, les stimuli de référence étaient de type H et le stimulus test était de type T; dans l'autre moitié, les références étaient de type T et le test était de type H. Cette manipulation nous permettait d'examiner les effets éventuelles des variables non-numériques sur la performance, comme ce ne sont pas les mêmes paramètres qui sont corrélés avec la numérosité (en moyenne) dans les deux types de stimuli. Pour ces deux types de stimuli, les résultats révèlent des performances identiques, et nous obtenons la même valeur pour la fraction de Weber interne w. Les résultats s'accordent donc parfaitement avec notre hypothèse selon laquelle les sujets ont fait attention au nombre.

5.1.2 Modèle théorique

Nous partons de notre modèle de ligne numérique interne : chaque numérosité est représentée de manière analogue et prend la forme d'une activation sur un continuum interne, avec une certaine dispersion des activations au cours des essais. Nous supposons que la distribution des activations suit une loi gaussienne pour chaque numérosité n, centrée autour du point q_n et d'écart-type w_n . Nous avons présenté trois modèles alternatifs où les fonctions q et w prennent des formes différentes :

- le modèle logarithmique : $q_n = \log(n)$ et $w_n = w$;
- le modèle puissance : $q_n = n^k$ et $w_n = w * n^k$;
- et enfin le modèle linéaire, qui est un cas particulier du modèle puissance : $q_n = n$ et $w_n = w * n$.

Tâche de comparaison

Dans notre version de la comparaison, à chaque essai le stimulus test devait être comparé à la même valeur de référence. Cette valeur de référence est sur-apprise, présentée trois fois par essai soit 144 fois sur l'ensemble d'un bloc. Nous pensons donc que les sujets ont dû concevoir une estimation précise de la valeur de référence, au fur et à mesure des essais. C'est-à-dire qu'ils ont pu placer un critère à l'endroit de q_R (le point associé à la valeur de référence sur la ligne numérique), régissant la prise de décision comme suit : si l'activation tombe à gauche de q_R , répondre 'plus petit', et s'il tombe à droite, répondre 'plus grand'.

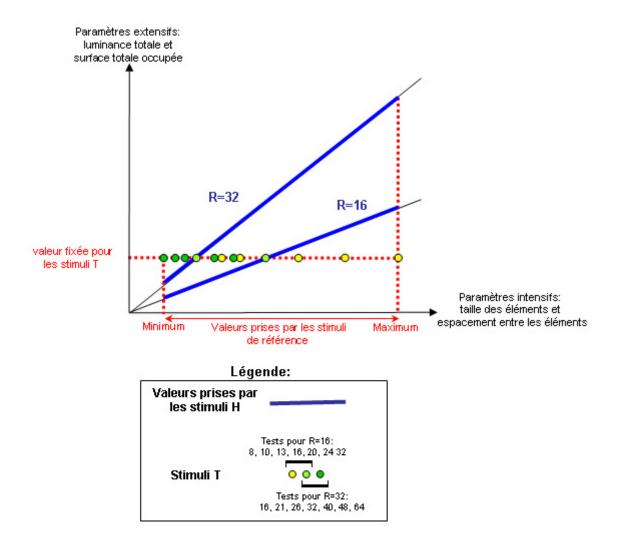


FIG. 5.2 – Méthode utilisée pour contrôler les paramètres non-numériques. Le graphique montre la distribution des paramètres non-numériques pour les stimuli de type H (en bleu) et les stimuli de type T (en jaune et vert). La figure a été tracée pour la tâche de détection de changement, et la même logique régit la génération des stimuli pour la comparaison, bien que les valeurs numériques soient différentes. Les stimuli de type H servaient de stimuli de référence pour la détection de changement. Pour ces stimuli, la taille des éléments et l'espacement entre les éléments variaient aléatoirement, et la valeur moyenne était la même pour les stimuli de numérosité 16 et 32. De fait, ces stimuli différaient sur le plan de la luminance totale et de la surface totale occupée (en moyenne, les nuages contenant 32 éléments avaient une luminance plus élevée et occupaient une surface plus large sur l'écran). Cependant, pour les stimuli de type T (qui servaient de stimuli test dans la tâche de détection de changement) ces paramètres étaient constants. Ainsi, aucun de ces quatre paramètres ne peut expliquer les performances. Pour la tâche de comparaison, afin de renforcer les contrôles, les stimuli de référence et de test pouvaient tous être soit de type T soit de type H. Reproduit depuis [Piazza et al., 2004].

La probabilité d'observer une réponse 'plus grand' pour un stimulus de numérosité n correspond à l'intégrale de la courbe d'activation de n sur la partie de la ligne numérique située après q_R :

$$P_{\text{plus grand'}}(n) = \int_{q_R}^{+\infty} \text{Gauss}(q_n, w_n)$$

$$= \int_{\frac{q_R - q_n}{w_n}}^{+\infty} \text{Gauss}(0, 1)$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{q_n - q_R}{w_n}} \text{Gauss}(0, 1)$$

$$= F\left(\frac{q_n - q_R}{w_n}\right)$$

où F est la fonction de cumul associée à une distribution gaussienne centrée sur 0 et de variance 1: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} Gauss(0,1).$

Dérivée pour les trois modèles qui nous intéresse, cette formule donne :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{mod\grave{e}le\ logarithmique}: & P_{\mathrm{plus\ grand'}}(n) = F\left(\frac{1}{w}\log(\frac{R}{n})\right) \\ \mathbf{mod\grave{e}le\ lin\acute{e}aire}: & P_{\mathrm{plus\ grand'}}(n) = F\left(\frac{1}{w}(1-\frac{R}{n})\right) \\ \mathbf{mod\grave{e}le\ puissance}: & P_{\mathrm{plus\ grand'}}(n) = F\left(\frac{1}{w}\left(1-\left(\frac{R}{n}\right)^k\right)\right) \end{array}$$

Toutes ces formules dépendent d'un seul paramètre : la fraction de Weber interne w. A valeurs de w comparables, les prédictions des trois modèles ne différent que très peu, comme le montre la figure 5.3.

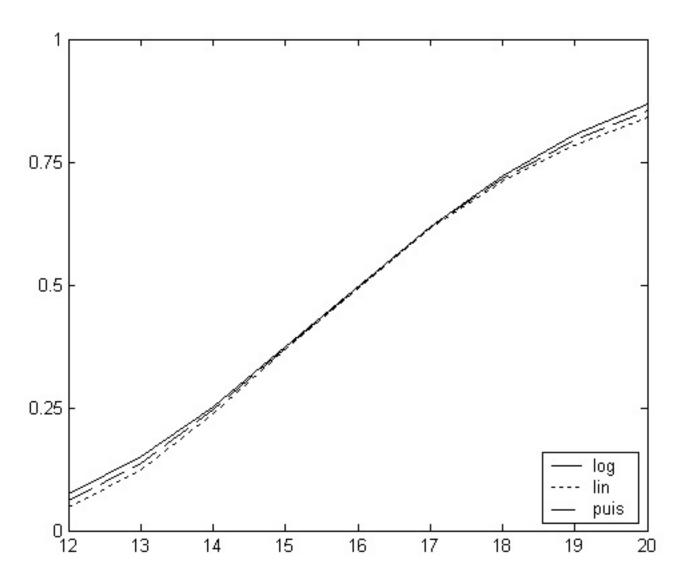
Prédictions des modèles et loi de Weber Les trois modèles prédisent que les performances suivent la loi de Weber, mais en partie seulement. En effet, dans les trois cas, les performances ne dépendent que du ratio entre la numérosité de référence et le stimulus $\frac{R}{n}$. Nous devrons donc avoir les mêmes performances quand la référence contient 16 items et le stimulus à comparer 12, que quand la référence a 32 items et le stimulus 24. D'un autre côté, considérons deux stimuli $(n_1 = \alpha R \text{ et } n_2 = \frac{R}{\alpha})$ entrant dans le même ratio α avec la référence, l'un étant plus petit et l'autre plus grand que celle-ci. Selon une interprétation forte de la loi de Weber (règle du ratio), ces deux stimuli devraient conduire à la même performance. C'est ce que prédit le modèle logarithmique :

$$P_{\text{plus grand'}}(n_1) = F\left(\frac{1}{w}\log\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)$$

$$P_{\text{plus petit'}}(n_2) = 1 - F\left(\frac{1}{w}\log(\alpha)\right)$$

$$= F\left(-\frac{1}{w}\log(\alpha)\right)$$

$$= F\left(\frac{1}{w}\log\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)$$



 $Fig.~5.3-Pr\'ediction~des~mod\`eles~logarithmique,~lin\'eaire~et~puissance~pour~la~t\^ache~de~comparaison.$

Selon les modèles puissance et linéaire, cependant, il n'en est pas de même :

$$P_{\text{plus grand'}}(n_1) = F\left(\frac{1}{w}\left(1 - \frac{1}{\alpha^k}\right)\right)$$

$$P_{\text{plus petit'}}(n_2) = 1 - F\left(\frac{1}{w}\left(1 - \alpha^k\right)\right)$$

$$= F\left(\frac{1}{w}\left(\alpha^k - 1\right)\right)$$

$$= F\left(\frac{1}{w\alpha^k}\left(1 - \frac{1}{\alpha^k}\right)\right)$$

La numérosité menant à la même performance que n_1 sera donc $n_2'=\frac{R}{\gamma}$ où γ vérifie :

$$1 - \frac{1}{\alpha^k} = \gamma^k - 1$$

$$\gamma = \left(2 - \frac{1}{\alpha^k}\right)^{\frac{1}{k}}$$

En posant $\alpha = 1 + \epsilon$, et dans la limite où ϵ est petit, cette formule donne $\gamma = 1 + \epsilon$ au premier ordre en ϵ . Pour des numérosités proches entre elles, les divergences entre les prédictions des trois modèles au niveau des propriétés de symétrie de la courbe de performance sont donc subtiles².

Nous avons ajusté la valeur de la fraction de Weber interne w en sorte que la courbe théorique s'accorde au mieux avec les données. Au vu de l'extrême similarité entre les courbes de réponses prédites par les trois modèles, nous ne reportons ci-après que la valeur de w calculée sur la base du modèle logarithmique.

En l'absence de biais, la courbe des performances devrait passer par 0.5 (50% de réponses correctes correspondant au niveau du hasard) précisément au point n. Dans la plupart des cas, c'est ce que nous obtenons. Néanmoins, on peut identifier un léger biais dans les réponses si on isole les essais où le stimulus test prend la forme de triangles. Dans la formule qui a été utilisée pour l'ajustement des courbes, nous introduisons un biais β au niveau du critère de réponse :

$$P_{\text{plus grand'}} = F\left(\frac{q_n - q_R - \beta}{w_n}\right).$$

La stratégie du maximum de vraisemblance Selon la méthode du maximum de vraisemblance, il faut considérer les distributions d'activations associées aux deux réponses possibles ('plus grand' et 'plus petit') et placer un critère de réponse à l'endroit où celles-ci se croisent. Comme les numérosités que nous utilisons sont réparties de manière symétrique autour de la valeur de référence, cela revient à calculer le point de

²On pourrait s'étonner de cette violation de la loi de Weber, alors que nous avons justement construit nos modèles en sorte qu'ils soient compatibles avec cette loi. En fait, ce que nous avons posé, c'est que la performance dépende uniquement du ratio dans une tâche de comparaison classique, où les deux numérosités à comparer ont un statut équivalent. Or ici, la numérosité de référence est traitée différemment : présentée plus de 100 fois au cours de chaque bloc (y compris pendant une période d'entraînement), nous supposons que sa représentation atteint une précision quasi-parfaite (tâche psychophysique de "reminder"). Or, pour que les modèles puissance et linéaire soient accordés avec la loi de Weber, le modèle suppose justement que le niveau de bruit w_n varie en fonction de n. C'est ce qui fait défaut à notre situation présente pour que les prédictions s'accordent complètement avec la loi de Weber.

croisement entre les courbes d'activations associées aux numérosités R-1 et R+1 (pour R=16); ou R-2 et R+2 (pour R=32).

Le critère sera donc égal à :

$$c = \frac{\log(R-1) + \log(R+1)}{2} = \log(R) + \frac{\log\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)}{2}$$

Si la stratégie adoptée relève du maximum de vraisemblance, nous devrions donc observer un biais négatif par rapport à la situation décrite ci-dessus dans le cas du modèle logarithmique : le placement du critère sur la ligne interne correspondrait aux numérosités 15.97 et 31.98 respectivement dans nos deux conditions expérimentales (au lieu de 16 et 32). Il s'agit donc d'un biais négligeable, que nous ne nous attendons pas à observer au niveau des données.

Tâche de détection de changement

Dans cette tâche, les participants jugent si un ensemble est de même numérosité que l'ensemble de référence (lui-même de numérosité 16), ou si sa numérosité est différente (liste des valeurs possibles : 8, 10, 13, 20, 24, et 32). Lorsque l'ensemble de référence contenait 32 points, nous avons utilisé les doubles des précédentes valeurs : 16, 20, 26, 40, 48, et 64. On peut implémenter complètement la stratégie du maximum de vraisemblance pour cette situation : dans le cas du modèle logarithmique, comme les valeurs utilisées suivent une progression géométrique, la stratégie du maximum de vraisemblance prédit que le sujet associe la réponse 'identique' à un intervalle de sa ligne numérique interne centré sur $\log(R)$, le reste de la ligne étant associé à la réponse 'différent'. Pour les modèles linéaire et puissance, la méthode du maximum de vraisemblance définit de la même façon deux critères situés de part et d'autre de la valeur de référence, mais cette fois l'intervalle n'est pas nécessairement centré sur la valeur de référence.

Une fois que les deux critères d_1 et d_2 délimitant l'intervalle associé à la réponse 'identique' ont été définis, la probabilité de donner la réponse 'identique' face à un stimulus de numérosité n s'écrit :

$$p_{\text{'identique'}} = \int_{d_1}^{d_2} \text{Gauss}(q_n, w_n).$$

Selon notre théorie, les prédictions des trois modèles logarithmique, linéaire et puissance, sous l'hypothèse d'un observateur optimal, sont essentiellement indissociables. Par la suite, pour des raisons de simplicité (notamment au niveau de la définition des critères de réponse), nous n'utilisons que le modèle logarithmique.

Par contre, nous avons introduit la possibilité que les critères de réponse ne soient pas complètement optimaux. Contrairement à la tâche de comparaison, la définition des critères ici dépend beaucoup du choix des stimuli, au niveau des numérosités mises en jeu et des probabilités d'occurence des réponses. Le sujet était informé que 75% des stimuli allaient être différents de la référence, mais a pu être imprécis pour adapter son comportement à cette information; par contre il ne savait pas quelles étaient les numérosités mises en jeu. Toutes ces imprécisions ont pu conduire à une définition approximative des critères : pour cette raison, nous avons introduit un paramètre supplémentaire δ et posé que les critères sont égaux à $\log(R) - \delta$ et

 $\log(R) + \delta$. Notons que nous conservons la propriété de symétrie des critères autour de la référence, que nous avions obtenue dans le cadre du modèle logarithmique.

Dans ces conditions, la formule donnant la probabilité de choisir la réponse 'différents' s'écrit :

$$P_{\text{différents'}}(n, R) = 1 - \int_{\log(R) - \delta}^{\log(R) + \delta} Gauss(\log(n), w)$$

soit

$$P_{\text{diff\'erents'}} = 1 - \int_{-\delta}^{+\delta} \text{Gauss}\left(\log\left(\frac{n}{R}\right), w\right).$$

La formule précédente a servi pour modéliser les données de la tâche de détection de changement, avec deux paramètres libres w et δ . Ici, le modèle logarithmique prédit une courbe de réponse symétrique quand elle est tracée sur un axe logarithmique. Pour le vérifier, considérons deux numérosités, situées à égale distance de la référence sur un axe logarithmique : $n_1 = \alpha R$ et $n_2 = \frac{R}{\alpha}$. Le taux de détection du changement pour ces deux numérosités est :

$$\begin{split} P_{\text{diff\'erents'}}\left(n_1,R\right) &= 1 - \int_{-\delta}^{+\delta} \text{Gauss}\left(\log(\alpha),w\right) \\ P_{\text{diff\'erents'}}\left(n_2,R\right) &= 1 - \int_{-\delta}^{+\delta} \text{Gauss}\left(\log\left(\frac{1}{\alpha}\right),w\right) = 1 - \int_{-\delta}^{+\delta} \text{Gauss}\left(-\log(\alpha),w\right) \end{split}$$

L'égalité entre les deux lignes précédente est vérifiée car les bornes de l'intégrale δ et $-\delta$ sont opposées.

Nos données expérimentales suivent la prédiction de symétrie, sauf lorsque nous séparons la condition où le stimulus test est constitué de triangle (changement de forme). Pour cette condition particulière, nous avons ajouté un troisième paramètre β , en sorte que l'intervalle de réponse ne soit plus centré sur $\log(R)$ mais sur $\log(R) + \beta$. La fonction que nous avons utilisée pour les régressions devient alors :

$$P_{\text{'diff\'erent'}}(n,R) = 1 - \int_{\beta-\delta}^{\beta+\delta} \text{Gauss}\left(\log\left(\frac{n}{R}\right),w\right).$$

5.1.3 Résultats

Détection de changement

La performance des sujets varie significativement en fonction de la distance entre la numérosité de référence et la numérosité du stimulus test [F(6,42)=106.3; p<0.0001]. La proportion de réponses 'différents' adopte une forme classique de courbe en U, caractéristique des jugements approximatifs. La forme de cette courbe correspond précisément aux prédictions de notre modèle théorique. Lorsqu'on les trace sur une échelle linéaire, les courbes de réponses étaient asymétriques et deux fois plus large pour la référence 32 que pour la référence 16. (figure 5.4 A). Cependant, les courbes deviennent symétriques et prennent la forme d'une gaussienne lorsqu'on les trace sur un axe logarithmique (figure 5.4 B). De plus, les courbes pour 16 et 32 se superposent lorsqu'on exprime les performances en fonction du ratio entre la numérosité test et la numérosité de référence (figure 5.4 C). Pour démontrer les propriétés de symétrie que nous venons de décrire, nous avons ajusté les données sur une courbe gaussienne et sur une courbe log-gaussienne. Chez tous les participants, l'ajustement est meilleur avec la courbe log-gaussienne $[r^2 \pm 1$ écart type $= 70.5\% \pm 11.3\%$ versus $90.9\% \pm 5.6\%$; t(7)=7.23; p<0.0001]. Le modèle exposé au paragraphe précédent explique bien les données, puisqu'il permet

de rendre compte de 98.8% de la variance. Avec ce modèle, nous estimons la valeur de la fraction de Weber interne à w=0.170.

Comparaison

L'analyse des données de comparaison conduit au même type de résultats. Les courbes de réponses prennent la forme classique d'une courbe sigmoïde classique, avec une pente deux fois plus importante pour la référence 32 que pour la référence 16 (figure 5.4 E). Bien que les numérosités tests soient ici réparties linéairement autour de la référence, les courbes de réponses sont encore asymétriques, et mieux modélisées par la primitive d'une log-gaussienne que d'une gaussienne $[r^2 \pm 1$ écart type =88.0%±4.1% versus 94.9%±2.4%; t(7)=6.23; p=0.0004]. Sur les données moyennées, une régression log-gaussienne permet d'expliquer 99.7% de la variance et donne une valeur pour la fraction de Weber interne très proche de celle que nous avons obtenue dans la tâche de détection de changement (w = 0.174). Cette valeur reste du même ordre de grandeur que celles qui ont été obtenues dans des études antérieures ([Cordes et al., 2001b, van Oeffelen and Vos, 1982, Whalen et al., 1999]).

Discussion sur les différentes échelles internes

Les résultats que nous donnons sont basés uniquement sur le modèle logarithmique. A vrai dire, nous l'avons vu dans la section méthode, les prédictions des trois modèles sont assez indissociables, à part quelques subtiles considérations de symétrie dans la tâche de comparaison. Au vu de ces propriétés de symétrie, les données sont compatibles avec le modèle logarithmique. Nous n'avons pourtant pas essayé de rejeter systématiquement les autres modèles. Si, dans le cas du modèle logarithmique, les propriétés de symétrie sont faciles à extraire (la courbe doit être symétrique sur un espace logarithmique), c'est beaucoup moins évident pour les modèles linéaire et puissance. Traquer les propriétés de symétrie associées à ces modèles nécessiterait d'appliquer à l'axe des abscisses des transformations complexes, dépendant pour le modèle puissance du paramètre inconnu k. De plus, comme nous l'avons noté plus haut, les différences entre les propriétés de symétrie prédites par les trois modèles sont assez subtiles, et très certainement il est impossible de les observer expérimentalement.

Pour la tâche de détection de changement, les prédictions des trois modèles pour un observateur optimal sont confondues; pour cette raison, nous n'avons donné une version finalisée du modèle (observateur non-optimal) que dans le cas logarithmique. Il faut noter également que les modèles associés aux échelles linéaire et puissance auraient été assez difficiles à construire, car, même pour un observateur non-optimal, il aurait fallu prendre en compte la forme des critères de réponse. Dans ce cas-là en effet, le segment de la ligne numérique associé à la réponse 'identique' n'est pas centré sur la valeur de référence, et il est difficile de généraliser cette forme pour donner un modèle d'observateur non-optimal.

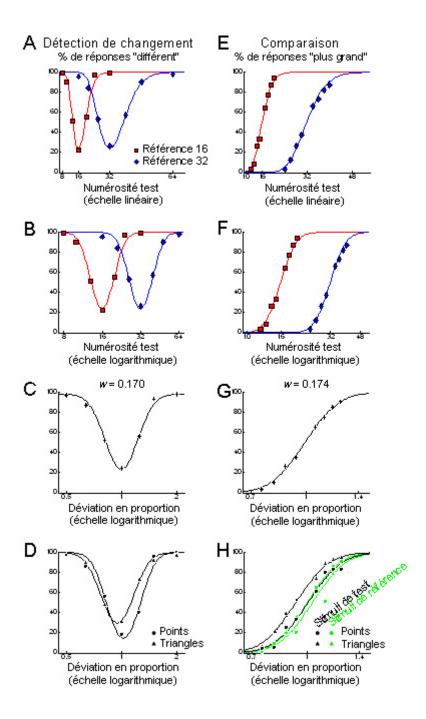


FIG. 5.4 – Les graphiques sur la colonne de gauche représentent la proportion d'essais où les participants répondaient que le stimulus de test différait en numérosité des stimuli de référence. Les graphiques de la colonne de droite réprésentent la proportion d'essais où les participants répondaient que le stimulus de test était plus numéreux que les stimuli de référence. Dans les deux cas, les taux de réponses sont tracés en fonction de la déviation numérique. Les courbes de réponses sont asymétriques quand on les trace sur une échelle linéaire (A et E), mais deviennent symétriques sur une échelle logarithmique (B et F), et ne dépendent que du ratio entre les deux nombres (C et G). Les réponses sont légèrement influencées par les changements de forme des éléments (D et H).

Effet des paramètres non numériques

Dans les deux tâches, les courbes moyennes sont centrées sur le nombre de référence, ce qui suggère que les participants étaient capables d'extraire la numérosité des stimuli malgré les changements au niveau de la taille des items, de la densité du nuage, et de sa configuration. Notamment, les stimuli de référence différaient beaucoup des stimuli sur lesquels portaient les tests. Les changements de forme des items, cependant, ont un modeste impact sur les performances. Dans la tâche de détection de changement, les nuages de triangles de petite numérosités étaient jugés identiques plus souvent que les nuages de grande numérosité, alors qu'on ne relève aucun biais de cette sorte pour les nuages de points (figure 5.4 D) [effet principal de forme, F(1,7)=12.70, p=0.009; interaction forme*distance, F(6,42)=3.38, p=0.008]. De la même façon, dans la tâche de comparaison, les sujets répondent 'plus grand' plus souvent quand le stimulus cible est fait de triangles que quand il est fait de points [effet principal de forme, F(1,7)=18.81, p=0.003]. Ces deux effets correspondent à un biais de sur-estimation (5%-7%) pour les triangles par rapport aux points, peut-être lié au fait que les triangles apparaissaient légèrement plus gros. Cependant, nous ne retrouvons pas de biais lorsque ce sont les items des stimuli de référence qui prennent une forme triangulaire [F(1,7)=1.60, p=0.25], même si, au niveau global, on note une interaction entre la forme et la distance [F(7,49)=5.43, p=0001]. Cette absence de biais paraît assez naturel dans cette expérience, car les stimuli de référence apparaissaient de nombreuses fois au cours d'un bloc, prenant alternativement la forme de points et de triangles. Ceci dit, malgré le biais que nous venons d'identifier, la fraction de Weber interne reste la même pour toutes les conditions (comprise entre 0.162 et 0.175), ce qui suggère que les sujets estimaient réellement la numérosité, et non une autre variable physique de bas niveau.

5.2 Addition et soustraction de numérosités³

5.2.1 Méthodes expérimentales

Addition et comparaison de nuages de points

Dix sujets (moyenne d'âge 50 ans) ont participé à cette expérience, comme contrôles pour un groupe d'Indiens Mundurucús (voir chapitre 10). Chaque essai consistait en une courte vidéo illustrant l'addition de deux ensembles de large numérosité (voir figure 5.5 A). Au début, on montrait une boîte de conserve vide. La boîte revenait ensuite en position verticale, et deux nuages de points descendaient successivement du haut de l'écran dans la boîte. Ces deux ensembles n'apparaissaient jamais simultanément, mais se suivaient sans délai (temps de descente de chaque nuage : 5 secondes; délai entre les deux nuages : 0 seconde). Juste après que le deuxième nuage soit descendu, un troisième nuage apparaissait à droite de la boîte. Les participants devaient indiquer où il y avait le plus de points à la fin de la vidéo, en comparant le nombre total de points cachés dans la boîte, et le nombre de points visibles apparus à sa droite. Dans la moitié des essais, il y avait

 $^{^3}$ Une partie de ces travaux ont été publiés sous la référence [Pica et al., 2004], en particulier dans le $Supplementary\ Online\ Material$

plus de points à l'extérieur de la boîte; dans les autres essais, il y en avait plus à l'intérieur. La difficulté de la tâche était manipulée en variant le ratio entre les numérosités $n_1 + n_2$ et n_3 . Dans les trois premiers essais, ce ratio était de 4, puis il variait systématiquement dans les essais suivant, avec pour valeurs possibles 1.3, 1.5 et 2.0 (avec au total 16 essais pour chaque valeur). Nous avons utilisé des paires de numérosités comprises entre 30 et 80. Pour chaque ratio étudié, nous avons utilisé deux paires de numérosités : une paire de grands nombres (dont le maximum valait toujours 80), et une paire de plus petits nombres. A chaque essai, l'une des deux numérosités de la paire était divisée en deux parties $(n_1$ et n_2), suivant les proportions suivantes : $\frac{2}{3}/\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}/\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}/\frac{2}{3}$. Dans la moitié des essais, la luminance totale et l'espace occupé sur l'écran étaient égalisés entre toutes les numérosités; pour l'autre moitié, c'étaient la taille des points et leur espacement moyen qui étaient constants.

Soustraction de nuages de points

Les dix mêmes sujets ont participé à cette deuxième expérience. Comme dans la précédente, les stimuli se présentaient sous la forme de courtes séquences vidéo, représentant une soustraction de deux quantités. Au début, nous montrions une boîte de conserve vide sur l'écran. Puis quelques points tombaient dans la boîte depuis le haut de l'écran, et après quelques secondes des points retombaient au-dessous de la boîte, comme si celle-ci avait été percée (temps de descente de chaque nuage : 2 secondes ; délai entre les nuages : 6 secondes ; voir figure 5.5 B). Nous avions deux versions pour cette tâche : dans la première version, qualifiée ci-après de "non-verbale", les participants devaient choisir la réponse juste parmi trois propositions de résultats (0, 1 ou 2 points). Tous les problèmes de soustraction commençant par les numérosités 1 à 8 et dont le résultat est compris entre 0 et 2 étaient présentés chacun une ou deux fois, formant un total de 30 essais. Dans une deuxième version, les sujets devaient nommer la réponse. Pour cette version, nous utilisions tous les problèmes commençant par les numérosités 1 à 8, et dont le résultat était compris entre 0 et 4, pour un total de 43 essais.

Dans la moitié des essais, l'espacement des points et l'espace occupé sur l'écran augmentaient avec la numérosité; ils diminuaient dans la deuxième moitié des essais. La taille des points était tirée de manière pseudo-aléatoire entre deux valeurs possibles. Pour la version non-verbale, les particpants devaient choisir entre trois images représentant des ensembles de 0, 1 ou 2 points. Ces points étaient soit identiques en taille à ceux présentés au cours de la soustraction, soit de taille différente.

5.2.2 Modèle théorique

Les modèles logarithmique, linéaire et puissance ménent à des prédictions semblables (nous en avons vu deux exemples ci-dessus), avec seulement parfois quelques différences subtiles au niveau des propriétés de symétrie des distributions de réponses. En particulier, les trois modèles prédisent que le comportement est soumis à un effet de distance et à la loi de Weber. Pour des expériences telles que celles que nous décrivons ici, qui ne comptent que très peu d'essais, nous avons très peu de chances d'observer des propriétés subtiles de symétrie. Pour cette raison, nous ne tenterons pas ici de séparer les différents modèles, mais utilisons

par la suite le modèle linéaire, parce que celui-ci mène à des développements mathématiques beaucoup plus simples dans le contexte qui nous intéresse. Au cours de notre étude, nous avons cependant vérifié que le modèle logarithmique expliquait aussi bien les données.

Tâche d'addition et comparaison de nuages de points

On présente au sujet trois nuages de numérosité n_1 , n_2 , et n_3 , et on lui demande de calculer $n_1 + n_2$ et de comparer le résultat à n_3 . Selon la méthode du maximum de vraisemblance, le critère de réponse optimal dépend d'une manière complexe de la liste des valeurs prises par n_1 , n_2 et n_3 . Nous adopterons une hypothèse simplificatrice, selon laquelle les sujets répondent en calculant le signe de $N_1 + N_2 - N_3$, où les N_i sont les numérosités associées aux activations $X_{i,i=1,2,3}$ sur la ligne numérique $(N_i = q^{-1}(X_i))$. C'est ici qu'utiliser le modèle linéaire simplifie grandement les calculs, car alors $N_i = X_i$. La somme $N_1 + N_2 - N_3$, en tant que somme de variables aléatoires gaussienne, suit elle-même une loi gaussienne, de moyenne $n_1 + n_2 - n_3$, et d'écart type $w\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$. Le taux d'erreur correspond à l'aire située sous la queue de la courbe :

$$P_{erreur}(n_1, n_2, n_3) = \int_{-\infty}^{0} Gauss \left(|n_1 + n_2 - n_3|, w\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \right)$$

$$P_{erreur}(r, \alpha) = \int_{-\infty}^{0} Gauss \left(|1 - r|, w\sqrt{1 + 2\alpha(\alpha - 1) + r^2} \right)$$

$$P_{erreur}(r, \alpha) = F\left(\frac{|1 - r|}{w\sqrt{r^2 + 1 + 2\alpha(\alpha - 1)}} \right)$$

où $r = \frac{n_3}{n_1 + n_2}$, $\alpha = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$, et F est la primitive d'une gaussienne.

En général, le taux d'erreur dépend donc à la fois du ratio r et de α . Cependant, α , qui décrit comment la somme a été décomposée en n_1 et n_2 , n'a qu'un impact modeste sur les prédictions, car le terme $2\alpha(\alpha-1)$ est toujours compris entre -0.4 et -0.5, et apparait au sein d'une somme contenant un terme constant 1. Par suite, nous avons régressé les données avec un seul paramètre libre, w, en remplaçant $2\alpha(\alpha-1)$ par sa valeur moyenne dans nos stimuli.

Par ailleurs, le modèle prédit-il que la courbe de réponse est symétrique sur une échelle logarithmique? Pour le savoir il faut comparer le taux d'erreur pour le ratio r et pour le ratio $\frac{1}{r}$.

$$P_{erreur}\left(\frac{1}{r},\alpha\right) = F\left(\frac{\left|1 - \frac{1}{r}\right|}{w\sqrt{\frac{1}{r^2} + 1 + 2\alpha(\alpha - 1)}}\right)$$

$$P_{erreur}\left(\frac{1}{r},\alpha\right) = F\left(\frac{|r-1|}{w\sqrt{1+r^2+2r^2\alpha(\alpha-1)}}\right)$$

Cette dernière quantité ne différe de $P_{erreur}(r,\alpha)$ qu'au niveau du terme en α qui apparait dans la racine. Nous prévoyons que la différence entre ces deux quantités sera plus grande pour des petites valeurs de r (réponse proposée proche du résultat correct). Avec les valeurs qui nous intéressent cependant, les différences sont assez subtiles, de l'ordre de 2%: ayant peu de chance d'observer de si petites différences dans une expérience aussi courte que la nôtre, nous avons décidé de regrouper les ratio inverses l'un de l'autre (par exemple, les essais où r=1.3 sont regroupés avec les essais où $r=\frac{1}{1.3}$).

Tâche de soustraction de nuages de points

Dans cette tâche, nous présentons au sujet deux nuages de numérosité n_1 et n_2 et lui demandons de calculer la soustraction $n_1 - n_2$. Le résultat doit être donné soit sous forme verbale (version verbale), ou en choisissant parmi trois possibilités (0, 1, et 2) dans version à choix forcé. Ici encore, la stratégie du maximum de vraisemblance suggère que le sujet commence par calculer $N_1 - N_2$, et examine ensuite où cette valeur tombe par rapport à des critères qui divisent la ligne numérique en plusieurs intervalles de réponse. Pour la version à choix forcé, ces critères séparent la ligne numérique en trois domaines associés aux réponses 0, 1, et 2. Pour la version verbale, à chaque réponse R sont associés deux critères $c_{-}(R)$ et $c_{+}(R)$ délimitant un intervalle sur la ligne numérique (avec $c_{-}(R+1)=c_{+}(R)$). Les critères de réponses que nous utilisons se situent aux points d'intersection des courbes d'activation des différentes numérosités : ces critères correspondent en réalité aux critères optimaux pour la dénomination de numérosité. Comme la courbe d'activation n'est pas définie pour la numérosité 0, nous la modélisons ici par la distribution d'activation générée par le problème '1 – 1', ce qui nous permet de définir le critère $c_{-}(1)$ (à l'intersection entre cette dernière courbe et la courbe pour la numérosité 1). A la place des critères précédents, on aurait pu adopter les critères issus de l'application stricte du principe du maximum de vraisemblance aux problèmes de soustraction présentés (définition des critères à partir des courbes d'activation des problèmes et non des courbes d'activation de chaque numérosité) : les résultats des analyses s'avèrent alors identiques.

Selon le modèle linéaire, $N_1 - N_2$ est une variable aléatoire gaussienne, de moyenne $n_1 - n_2$ et d'écart type $w\sqrt{n_1^2 + n_2^2}$. Une fois que les critères de réponses ont été définis, selon la procédure décrite dans le paragraphe précédent, la probabilité de donner la réponse R au problème $n_1 - n_2$ s'écrit :

$$P(R'|n_1, n_2) = \int_{c_-(R)}^{c_+(R)} Gauss\left(n_1 - n_2, w\sqrt{n_1^2 + n_2^2}\right).$$

Pour trouver la probabilité de donner une réponse correcte, il suffit de remplacer R par $n_1 - n_2$ dans la formule précédente :

$$P_{erreur}(n_1, n_2) = 1 - \int_{c_-(n_1 - n_2)}^{c_+(n_1 - n_2)} Gauss\left(n_1 - n_2, w\sqrt{n_1^2 + n_2^2}\right).$$

On voit que la probabilité de commettre une erreur dépend notamment de la taille de tous les nombres mis en jeu, et principalement de n_1 qui est forcément le plus grand d'entre eux.

5.2.3 Résultats

Addition et comparaison de grandes quantités

Notre modèle prédit que le comportement des sujets devrait dépendre principalement du ratio entre le résultat calculé $(n_1 + n_2)$ et la réponse proposée (n_3) , et dans une moindre mesure de la manière dont la somme a été décomposée (ratio $\frac{n_1}{n_1+n_2}$). Pour tester ces prédictions, nous avons soumis les réponses à une analyse de variance (ANOVA), avec 5 facteurs : le ratio $\frac{n_1+n_2}{n_3}$ (1.3, 1.5, 2 ou 4), la taille de la paire de numérosités (petits ou grands), quel est nombre de la paire qui a été décomposé en une addition (le plus

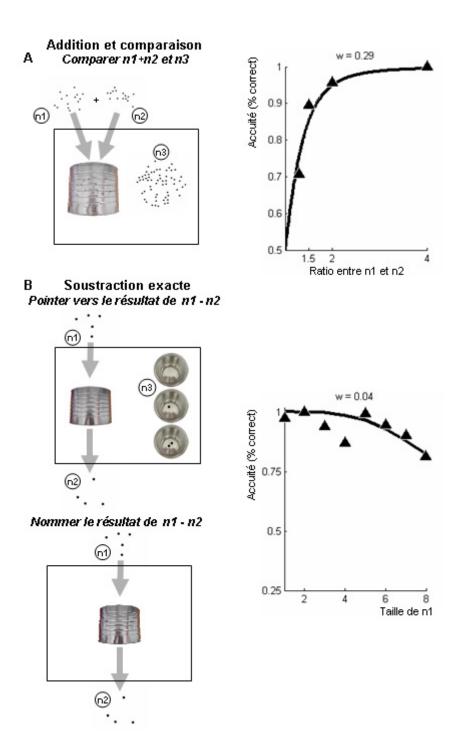


FIG. 5.5 – Tâches d'addition de grandes numérosités et de soustraction de petites numérosités. A chaque essai, un problème d'addition (A) ou de soustraction (B) est présenté sous la forme d'une animation, à l'aide d'une boîte et de points noirs. Les participants doivent comparer le résultat de l'addition à un troisième nuage (A). Pour la soustraction, soit ils nommaient le résultat, soit ils pointaient vers la réponse correcte (A). Pour l'addition, on donne la performance en fonction du ratio $\frac{n_1+n_2}{n_3}$: les courbes de réponse suivent la loi du ratio, et les prédictions de notre modèle. Dans le cas de la soustraction, les participants sont presque parfaits, car ils pouvaient utiliser le comptage pour dénombrer les ensembles.

petit ou le plus grand), le rapport entre les numérosités n_1 et n_2 (1/2, 1/1, ou 2/1), et le type de contrôles sur les paramètres non-numériques (paramètres intensifs constants ou paramètres extensifs constants). Conformément aux prédictions du modèle, nous obtenons un effet principal du ratio $r = \frac{n_1+n_2}{n_3}$ [F(3,27)=36.1; p<0.0001]: plus ces deux quantités sont distantes, plus les sujets réussissent la tâche (voir figure 5.5 1).

Outre la distance entre la réponse proposée et le résultat du calcul, d'autres facteurs influent sur la difficulté des problèmes posés. Par exemple, pour un même ratio r de 2, on proposait le problème '13+27 vs 80', et le problème '27+53 vs 40'. Dans le deuxième cas, on voit que l'emploi d'une stratégie simple, consistant à comparer un à un les opérandes avec la réponse proposée, suffit pour donner la réponse : puisque 53 est supérieur à 40, nécessairement 53+27 est supérieur à 40. Ce cas de figure n'intervient que quand c'est le plus petit des deux nombres qui est décomposé. On trouve en effet les sujets ont mieux répondu lorsque le nombre décomposé est le plus grand de la paire [F(1,9)=7.9; p=0.020]. Ce dernier effet interagit avec la proportion $\frac{n_1}{n_2}$ [F(2,18)=6.8; p=0.0064] : lorsque les deux opérandes n_1 et n_2 comptent respectivement pour 1/3 et 2/3 de la somme, la facilitation pour la situation où le nombre décomposé est le plus grand est amplifiée. Reprenons l'exemple précédent, correspondant à la paire 40/80, et plaçons-nous dans le cas de figure où le nombre décomposé est le plus grand de la paire (c'est-à-dire 80). Ce que l'interaction précédente donne, c'est que les sujets seront facilités par rapport aux problèmes associés où 40 est décomposé; et que la facilitation est plus grande pour '27+53 vs 40' que pour '40+40 vs 40' ou pour '53+27 vs 40'. Cette différence s'explique bien par la stratégie alternative que nous avons suggérée : lorsque les deux nombres comparés se succèdent dans le temps, la comparaison se fait plus facilement et la stratégie est plus facile à mettre en place. Enfin, l'effet de facilitation quand le nombre le plus grand est décomposé interagit avec la valeur du ratio r [F(3,27)=3.7; p=0.023]: en effet quand le ratio est grand (par exemple r=2), la performance est parfaite dans tous les cas, l'effet de facilitation est surtout visible pour les petits ratios r. Enfin, on relève un effet du type de contrôle des paramètres physiques : les performances sont meilleures quand les paramètres extensifs (luminance totale et espace occupé sur l'écran) corrèlent avec le nombre, que quand ce sont les paramètres intensifs (taille des points et densité) [F(1,9)=5.9; p=0.038]. On relève également une triple interaction significative, difficilement interprétable, entre le type de contrôles sur les paramètres physiques, la taille du nombre décomposé dans la paire, et le ratio [F(2,18)=4.2; p=0.032].

Au vu des résultats précédents, il semble difficile de nier que les sujets ont pu se reposer sur des stratégies simples ne nécessitant pas le calcul de l'addition, sur certains essais plus simples. Ils ont tout de même démontré leur capacité à effectuer une addition sur des quantités non-symboliques : si on restreint l'analyse aux essais pour lesquels notre stratégie alternative n'est pas possible (comme par exemple, le problème '13+27 vs 80'), les performances dépassent de loin le niveau du hasard [réponses correctes : 263/330 essais ; probabilité de s'écarter d'autant du niveau du hasard selon la loi binomiale : p<0.0001; hypothèse nulle rejetée]. On retrouve dans une analyse restreinte à ces essais un effet du ratio r [F(3,27)=13.8; p<0.0001]. Par ailleurs, lorsqu'on confronte ces données avec notre modèle, la régression donne une valeur de fraction de Weber interne assez élevée pour des humains adultes (w = 0.33).

Notons que ces travaux, développés dans un contexte particulier (l'expérience devait être passée également

par des indiens Mundurucús, voir à ce sujet le chapitre 10), n'avait pas pour vocation de tester notre modèle sur ces aspects quantitatifs. Ainsi, comme nous devions nous restreindre à un petit nombre d'essais, nous ne pouvions pas tester un ensemble de ratios r suffisant pour aboutir à une estimation fiable de w. Le but de cette expérience est avant tout de prouver qu'il est possible d'effectuer des opérations (en l'occurence des additions) sur des quantités non-symboliques : ce que nous sommes parvenus à montrer. Cependant, il était à mon sens intéressant de montrer comment, sans lui apporter un soutien fort, ces résultats s'accordent avec notre modèle des représentations analogiques de quantités. L'étude systématique de la tâche d'addition non-symboliques, avec un paradigme expérimental raffiné et approprié, est menée en ce moment au laboratoire, avec la participation de Koleen McCrink, de l'université de Yale.

Soustraction de petites quantités

Si les sujets utilisent leur ligne numérique pour résoudre cette tâche, nous prédisons que leurs réponses devraient être d'autant moins précises que les numérosités du problème sont grandes. Les réponses pour les deux versions (versions verbale, et à choix forcé) ont été regroupées et soumises à une analyse de variance avec pour facteurs : la réponse du problème (de 0 à 4), la numérosité du premier opérande (de 1 à 8), et le type de contrôles sur les paramètres physique (densité constante, ou espace occupé constant). On relève un effet principal de la taille du premier opérande [F(7,63)=4.7; p=0.0003], mais le profil des réponses ne suit pas strictement les prédictions : par exemple on relève des performances quasi-parfaites quand le premier opérande vaut 5, alors que celles-ci sont significativement moins bonnes quand le nombre de départ est 3. Pour s'assurer de l'inadéquation du modèle, nous avons essayé d'ajuster les données sur le modèle. On trouve une valeur pour la fraction de Weber interne de w = 0.039, une valeur hautement improbable (voir figure 5.5 B). Les sujets eux-mêmes rapportent avoir compté les points pendant que ceux-ci descendaient, ce qui explique que leur performance soit peu affectée par la taille des nombres. Par ailleurs, on relève une interaction entre le type de contrôles sur les paramètres physiques et la taille du problème [F(5,45)=3.5;p=0.0096. Pour les stimuli où la densité augmente avec la numérosité, on relève plus d'erreurs dans les grands nombres, tandis que le nombre d'erreurs reste négligeable pour les stimuli où la densité diminue. En fait, les premiers deviennent de plus en plus difficiles à compter quand la numérosité augmente. Ainsi, les stimuli de plus en plus denses mènent globalement à de moins bonnes performances que les stimuli de moins en moins denses [F(1,9)=13.1; p=0.0055].

5.3 Estimation de numérosité⁴

Dans la suite, nous nous appliquons à étudier la tâche d'estimation de numérosité. Contrairement aux expériences précédentes, nous verrons que celle-ci permet de séparer les différentes hypothèses concernant l'échelle du continuum interne. Par ailleurs l'estimation teste les liens entre représentations numériques verbales et non-verbales.

 $^{^4}$ Le manuscript rendant compte de cette étude est soumis à Perception & Psychophysics [Izard and Dehaene,].

5.3.1 Méthodes expérimentales

Stimuli

Des nuages de points contenant jusqu'à 100 items apparaissaient brièvement sur l'écran pendant 150 ms. Les points étaient jaunes sur un fond noir. Le nuage couvrait un angle visuel de 11.5°, chaque point ayant une taille minimale de 0.3°. Pour empêcher les sujets de répondre sur la base des paramètres physiques de bas niveau, nous avons généré trois séries de stimuli en contrôlant la luminance totale, la taille de chaque point, la densité du nuage, et l'espace occupé sur l'écran (figure 5.6). Dans la première série de stimuli, la somme des aires de tous les points (luminance totale du nuage) et l'espace occupé sur l'écran étaient les mêmes indépendamment de la numérosité. Par conséquent, la taille de chaque point diminuait quand la numérosité augmentait dans cette série de stimuli, et la densité des nuages augmentait. Dans la deuxième série, nous avons maintenu la taille des points constante ainsi que l'espace occupé par le nuage sur l'écran; la luminance totale et la densité augmentaient donc avec la numérosité. Enfin, dans la troisième série, la taille des points restait constante ainsi que la densité du nuage, et donc la luminance totale et l'espace total occupé augmentaient avec la numérosité. A travers ces trois séries, nous avons égalisé le valeur moyenne de la luminance totale et de la taille des points. Cependant, pour éviter que les points ne soient trop petits, nous avons dû assigner à la densité et à l'espace total occupé des valeurs moyennes différentes dans la troisième série de stimuli par rapport aux deux premières séries. Une fois que nos quatre paramètres avaient été déterminés en suivant les contraintes décrites ci-dessus, nous générions une grille de positions. Pour dessiner les nuages, le programme choisissait un ensemble aléatoire de n positions sur la grille, et ajoutait à chaque position une déviation aléatoire pour éviter que la grille soit perceptible. Dans ce contexte, nous pouvions définir la densité du nuage comme la proportion de positions de la grille qui étaient occupées. Pour chaque numérosité, un stimulus de chaque série était présenté. Ainsi, nous pouvons détecter si les sujets utilisaient une stratégie basée sur l'un des paramètres de bas niveau que nous avons contrôlés. En effet, si un sujet utilisait ce genre de stratégie, il y aurait une des séries de stimuli où ses réponses seraient constantes.

Expérience 3.1

Procédure Dans cette première expérience, il fallait estimer la numérosité des nuages de points, sans qu'aucun indice n'ait été donné au préalable. Les nuages contenaient de 1 à 100 points. Les sujets étaient autorisés à utiliser n'importe quel nombre pour répondre, et tapaient leurs réponses en chiffres arabes à l'aide du clavier de l'ordinateur.

Nous avons décidé de collecter un très grand nombre d'essais chez chaque sujet. Chacun participait à 5 sessions de 600 essais chacune, répartis en 12 blocs de 50 essais. Chaque session durait à peu près 1 heure et les 5 sessions étaient réparties sur 5 jours consécutifs. Lors d'une session, les numérosités de 1 à 100 étaient présentées 6 fois, soit 2 stimuli de chaque série.

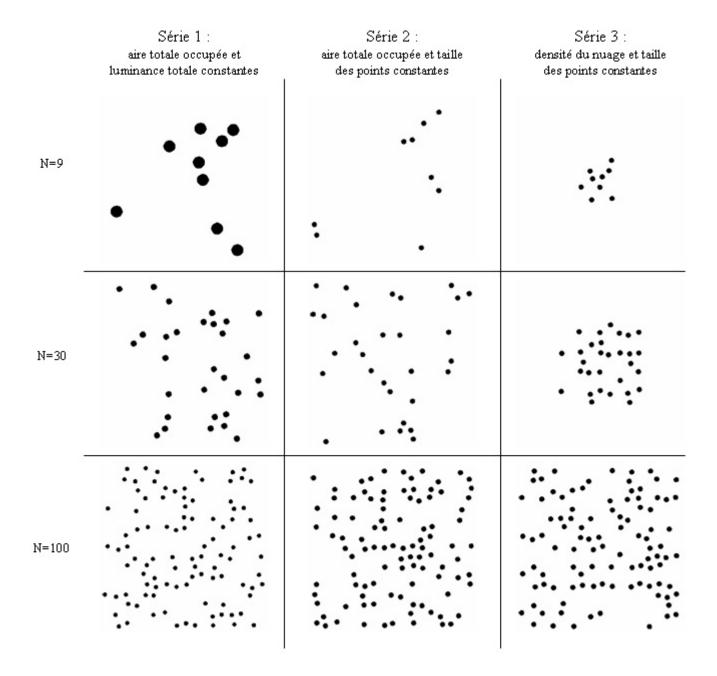


Fig. 5.6 – Exemples de stimuli de numérosité 9, 30 et 100 extraits des trois séries de stimuli. Les points étaient présentés en jaune sur un fond noir. Série 1 : l'aire totale occupée et la luminance totale sont constantes, et par suite la taille des points diminue lorsque la numérosité augmente et la densité du nuage augmente. Série 2 : l'aire totale occupée et la taille des points sont constantes, la luminance totale et la densité du nuage augmentent avec la numérosité. Série 3 : la densité du nuage et la taille des points sont constantes, la luminance totale et l'aire totale occupée augmentent avec la numérosité. Dans les trois série la taille moyenne des points et la moyenne de luminance totale sont égales. La densité moyenne est à peu près deux fois plus importante dans la troisième série. Par conséquence, l'aire totale occupée est à peu près deux fois plus petite dans la troisième série.

Participants Cinq sujets (3 hommes, 2 femmes; âge 23-26 ans) ont participé à cette expérience contre une rémunération. Tous étaient naïfs quant au but de l'expérience. Les 5 sujets ont tous fait 5 sessions, mais malheureusement pour le sujet ML les données de 2 sessions ont été perdues.

Expérience 3.2

Procédure Dans la deuxième expérience, nous présentions des nuages contenant de 9 à 100 points. Comme dans la première expérience, la tâche était d'estimer la numérosité des nuages de points, mais cette fois nous avons restreint les réponses autorisées aux seuls nombres ronds (nombres de 1 à 10, et nombres divisibles par 10 au-dessus de 10). L'enregistrement des réponses avait lieu de la même façon que dans la première expérience.

L'expérience 2 comptait 6 blocs de 46 essais. Avant chaque bloc, on montrait au sujet un exemple de stimulus (le stimulus de référence), en lui disant que celui-ci contenait 30 points. En fait, selon les conditions, la référence contenait soit 25 points (référence sur-estimée; ratio 30/25=1.2), 30 points (référence exacte; ratio 1), ou 39 points (référence sous-estimée; ratio 39/30=1.3). Les stimuli de référence étaient toujours issus de la troisième série de stimuli (densité du nuage et taille des points constantes). Comme nous le montrons ci-après dans la section résultats, en examinant comment les sujets s'adaptent à la référence pour les stimuli des trois séries, nous pouvons déterminer si ils se basent sur un paramètre non-numérique plutôt que sur la numérosité.

Après les 6 blocs, il y avait une pause d'une durée minimale de 20 minutes, puis les sujets passaient 6 autres blocs avec une nouvelle référence (incompatible donc avec la première). Si la première référence était sur- ou sous-estimée, dans cette deuxième partie on présentait la référence exacte; parmi les sujets qui ont vu une référence exacte avant la pause, la moitié étaient assignés à la condition de référence sur-estimée, l'autre moitié à la condition sous-estimée. Nous avons équilibré le nombre de sujets de chaque sexe pour chaque condition.

Participants Vingt-quatre sujets (12 hommes, 12 femmes; âge 19-33) ont été recrutés et rémunérés en échange de leur participation. Six d'entre eux ont reçu une référence sous-estimée, 12 une référence exacte, et 6 une référence sur-estimée. Les sujets ignoraient le but de l'expérience.

5.3.2 Prédictions du modèle

Résumé du modèle

Cette partie rappelle et étend le modèle tel qu'il a été exposé au chapitre 4. Pour la référence des abréviations utilisées ci-après, nous référons le lecteur à la table 4.4.1, située page 94.

Nous avons pris comme base pour définir le modèle une situation de référence, où les performances sont optimales. Dans cette situation, la ligne numérique est découpée en intervalles, associés aux différentes réponses; et les critères qui délimitent ces intervalles sont situés juste au milieu entre les points q_n (voir

figure 5.7 A). Un observateur réel, non-optimal, ne parvient pas tout à fait à utiliser cette grille de réponse optimale, mais il utilise une version transformée de celle-ci, étirée d'un facteur a, et décalée de b.

Dans notre deuxième expérience, avant que les sujets réalisent des estimations, nous leur montrons un nuage en leur disant que celui-ci contient 30 points. Cependant, à l'insu des participants, ce nuage de référence ne contient pas toujours exactement 30 points, ce qui nous permet d'explorer comment les réponses verbales peuvent être calibrées sur les représentations internes de quantité.

Dans cette section, nous calculons la forme de la fonction de réponse R(n) qui donne la réponse moyenne du sujet pour chaque stimulus. Avant de nous engager plus avant dans la théorie, nous voudrions insister sur le fait que la fonction de réponse R(n) ne coïncide pas nécessairement avec l'échelle interne q_n . Dans la situation optimale (a = 1, b = 0), les trois modèles prédisent que la fonction de réponse est linéaire : R(n) = n. Cependant, pour un observateur non-optimal, et à plus forte raison lorsque les sujets ont été induits à donner une réponse sur- ou sous-estimée par notre référence, la forme de la fonction de réponse dépend de la manière dont cet observateur dévie de l'optimalité, et va rarement être semblable à la forme de l'échelle interne q_n . En particulier, il n'est pas nécessaire de postuler que l'échelle interne est de forme puissance, même si nous observons que la fonction de réponse est une loi puissance.

Nous considérons deux mécanismes alternatifs pour expliquer comment les sujets se sont adaptés à la référence : soit ils ont adapté leurs réponses localement, soit toutes leurs réponses ont subi une transformation globale. Afin de réduire le nombre de paramètres libres du modèle, nous postulons que le processus d'adaptation, s'il est global, influe sur le choix de deux paramètres a et b décrivant une transformation affine appliquée à la grille de réponse. En fait, ce modèle s'adapterait aussi pour décrire un mécanisme où l'adaptation modifierait la position des activations sur la ligne numérique, plutôt que la position des critères.

Selon l'hypothèse d'une adaptation locale, seul l'intervalle correspondant à la réponse '30' serait modifié (voir figure 5.7 B) et du coup la fonction de réponse R(n) ressemblerait à la situation optimale : R(n) = n. Sous notre deuxième hypothèse d'une calibration globale, la grille de réponse est adaptée à la référence dans son intégralité. Dans ce qui suit, nous calculons la forme de la fonction de réponse, sous l'hypothèse d'une transformation affine des critères de réponse.

En voyant le stimulus de référence, qui préconise d'associer la réponse R_1 à un stimulus de numérosité n_1 , le sujet fixe deux paramètres a et b tels que $a*c_-(R_1)+b < q_{n_1} < a*c_+(R_1)+b$ (voir figure 5.7 B). Une fois que la valeur des paramètres a et b a été fixée, nous pouvons calculer la forme de la fonction de réponse après distorsion $R_{a,b}(n)$. Quand un stimulus de numérosité n est présenté, l'activation va en général se situer au niveau du point q_n , et le sujet va donner la réponse $R_{a,b}$ correspondant à l'intervalle de la grille de réponse incluant ce point q_n . Ainsi, la réponse la plus fréquente à la numérosité n est solution de l'inégalité :

$$a * c_{-}(R_{a,b}(n)) + b < q_n < a * c_{+}(R_{a,b}(n)) + b \tag{5.1}$$

Nous utilisons maintenant l'équation précédente, ainsi que la définition des critères optimaux, pour extraire la valeur de la fonction de réponse $R_{a,b}(n)$ en fonction de a et b. Les critères optimaux sont placés au milieu des segments $[q_R, q_{R+10}]$. On peut donc donner leur expression :

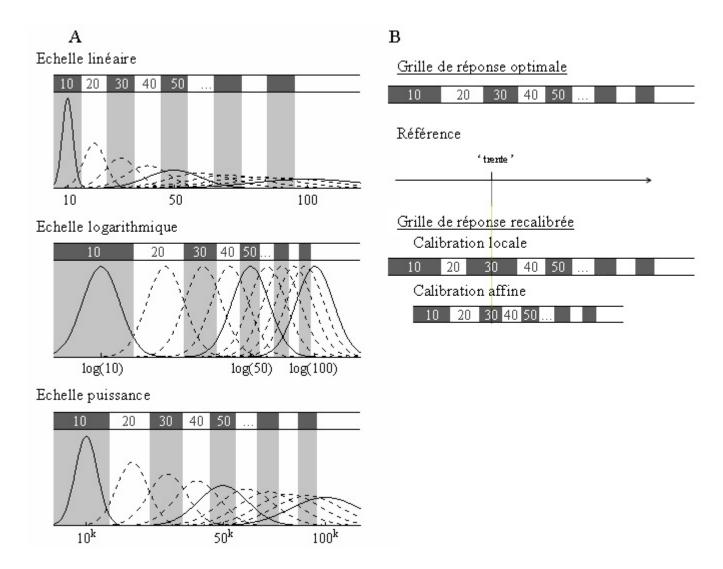


FIG. 5.7 – Grille de réponse. A. Grille de réponse optimale pour une échelle linéaire $(q_n = n)$, logarithmique $(q_n = \log(n))$, et puissance $(q_n = n^k)$. Les critères sont situés au milieu des segments $[q_n, q_{n+10}]$. B. Grille de réponse transformée après la présentation de la référence. Si la calibration a lieu à un niveau locale, seule la case associée à la réponse '30' est modifiée. Si la calibration est globale, toute la grille de réponse est transformée. Notre modèle postule que la grille subit une transformation affine. Les paramètres de la transformation sont choisis en sorte que la perception du stimulus de référence soit associée avec la réponse '30'.

échelle logarithmique:

$$c_{-}(R) = \frac{1}{2} (\log(R) + \log(R - 10)) \approx \log(R) - \frac{5}{R}$$

$$c_{+}(R) = \frac{1}{2} (\log(R) + \log(R + 10)) \approx \log(R) + \frac{5}{R}.$$

échelle linéaire:

$$c_{-}(R) = R - 5$$

$$c_+(R) = R + 5.$$

échelle puissance:

$$c_{-}(R) = \frac{1}{2} \left(R^k + (R - 10)^k \right) \approx R^k - 5kR^{k-1}$$

$$c_{+}(R) = \frac{1}{2} \left(R^{k} + (R+10)^{k} \right) \approx R^{k} + 5kR^{k-1}.$$

Pour une échelle logarithmique, l'inégalité 5.1 devient :

$$a\left(\log(R) - \frac{5}{R}\right) + b < \log(R) < a\left(\log(R) + \frac{5}{R}\right) + b$$

ce qui est approximativement équivalent à :

$$a\log(R) + b = \log(n)$$
 soit $R_{a,b}(n) = n^{\frac{1}{a}} e^{\frac{-b}{a}}$

Pour une **échelle linéaire**, le calcul est encore plus simple : la formule s'écrit a(R-5)+b < n < a(R+5)+b ce qui donne $R_{a,b}(n) = \frac{n-b}{a}$.

Enfin, dans le cas de l'échelle puissance, le calcul est plus fastidieux, mais en déroulant le même raisonnement on obtient les résultats listés dans la table 5.1 :

échelle logarithmique	$q_n = \log(n)$	$R_{a,b}(n) \approx n^{\frac{1}{a}} e^{\frac{1}{a}}$ (fonction puissance)
échelle puissance	$q_n = n^k$	si k<1 : $R_{a,b}(n) \approx \frac{1}{a^{\frac{1}{k}}} \left(n - \frac{b}{k} \right)$ (fonction linéaire)
		si k $>$ 1 : $R_{a,b}(n) \approx \frac{n}{a^{\frac{1}{k}}}$ (fonction linéaire avec un intercept nul)
échelle linéaire	$q_n = n$	$R_{a,b}(n) = \frac{n-b}{a}$ (fonction linéaire)

TAB. 5.1 – Forme des fonctions de réponses après application d'une transformation affine à la grille de réponse optimale pour une échelle interne logarithmique, linéaire ou puissance.

Ces équations confirment que la forme de l'échelle interne q_n n'est pas semblable à la fonction de réponse $R_{a,b}(n)$. Avec une échelle interne logarihtmique, on prédit que la fonction de réponse est une fonction puissance, alors qu'avec une échelle linéaire, la fonction de réponse est linéaire. Quant à l'échelle puissance, nous avons des prédictions différentes selon si l'échelle est compressive ou expansive : dans les deux cas, la fonction de réponse est linéaire, mais pour une échelle expansive, l'intercept en est nul.

Simulations

Dans la section précédente, nous avons calculé la forme théorique de la fonction de réponse pour les trois alternatives d'échelle interne. Ces résultats ne sont en fait que des approximations, valable pour des numérosités suffisamment grandes. Nous avons simulé les prédictions du modèle sur ordinateur, afin de vérifier si les numérosités que nous avons choisies dans notre protocole expérimental sont d'une taille suffisante. La figure 5.8 montre les résultats de ces simulations. Pour chacune des trois échelles interne, cette figure montre trois conditions différentes : grille de réponse optimale (a=1), grille de réponse dilatée $(a>a_{optimal})$, grille de réponse compressée $(a< a_{optimal})$. En plus de celles que nous présentons sur la figure, nous avons fait tourner des simulations pour d'autres valeurs de a. Avec les paramètres que nous avons choisis, nous vérifions que la forme des fonctions de réponses suit les prédictions théoriques de la table 5.1: la fonction de réponse est linéaire pour une échelle interne linéaire, elle a une forme puissance pour une échelle interne logarithmique. Dans une moindre mesure, les prédictions sont vérifiées aussi pour une échelle interne de forme puissance : les statistiques identifient une toute petite composante non-linéaire mais à l'oeil, les réponses semblent linéaires.

Les résultats des simulations ont été utilisées pour dessiner une analyse statistique d'une puissance suffisante pour séparer les trois modèles. Les réponses moyennes aux stimuli de numérosité 9 à 100 ont été soumises à une régression avec deux régresseurs orthogonaux : un régresseur linéaire, et une composante quadratique orthogonalisée par rapport au premier régresseur. Dans les conditions, ces régressions expliquaient plus de 99% de la variance. Même dans dans le cas de l'échelle linéaire, où nous prédisons que la fonction de réponse doit être linéaire, le deuxième régresseur contribue significativement à la régression, à cause des irrégularités que présente la fonction de réponse dans le domaine des petits nombres, où notre théorie n'est qu'une approximation. Ceci dit, la contribution du régresseur non-linéaire est bien moindre dans le cas de l'échelle linéaire que pour les deux autres échelles : le poids associé à ce régresseur va de -0.4 à 0.3 selon la valeur de a pour une échelle linéaire, mais atteint -1.4 et 6.9 pour une échelle logarithmique, et varie entre -0.8 et 3.8 pour une échelle puissance. Nous avons donc décidé de fixer un critère au niveau du poids de ce régresseur non-linéaire à \pm 0.5. Pour l'échelle linéaire, tous les poids tombent dans l'intervalle [-0.5 0.5], alors que pour l'échelle logarithmique, 9/11 simulations donnent des poids à l'extérieur de cet intervalle et significativement différents à la fois de 0.5 et de -0.5 [toutes valeurs de p<0.0001]. Pour l'échelle puissance, 7/11 simulations étaient dans cette même situation [toutes valeurs de p<0.05].

5.3.3 Résultats

Expérience 1 : réponses spontanées en l'absence de référence

Selon les prédictions de notre modèle, nous nous attendions à ce que le comportement des sujets suive des lois quantitatives précises : 1. les réponses devraient suivre la propriété de variabilité scalaire (coefficient de variation constant); 2. la réponse moyenne R(n) devrait être une fonction linéaire ou puissance de la numérosité.

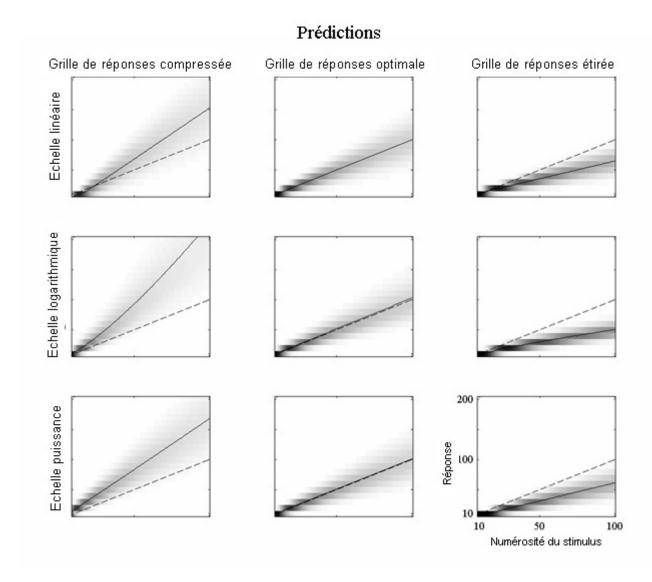


FIG. 5.8 – Réponses prédites pour les trois sortes d'échelle interne : linéaire, logarithmique et puissance. Axe horizontal : numérosité du stimulus (n); Axe vertical : réponse verbale (R). Les nuances de gris indiques la probabilité d'observer la réponse R pour un stimulus de numérosité n. La ligne continue indique la réponse moyenne, et les pointillés indiquent la valeur de la numérosité (diagonale R=n). Pour chaque modèle, on présente trois prédictions, qui correspondent à des valeurs différentes des paramètres de la transformation appliquée à la grille de réponse. Grille compressée : $a < a_{optimal}$; Grille optimale : $a = a_{optimal}$; Grille étirée : $a > a_{optimal}$.

Dans un premier temps, nous avons vérifié que les réponses des sujets étaient cohérentes : chez tous les sujets, les réponses augmentaient progressivement en fonction de la numérosité, tout en restant énormément sous-estimées (voir figure 5.9).

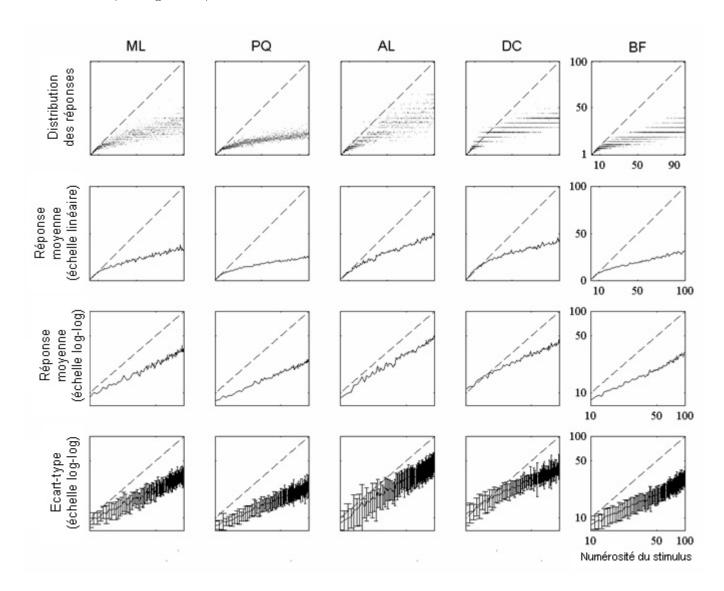


FIG. 5.9 – Réponses des 5 sujets non calibrés. Axe horizontal : stimulus (n); Axe vertical : réponse (R). Les graphiques de la première ligne montrent la distribution des réponses : les nuances de gris représentent le logarithme de la probabilité d'occurence de la réponse R pour le stimulus n. Sur les deuxième et troisième lignes, nous avons tracé les réponses moyennes, d'abord sur des axes linéaires, puis sur des axes log-log, c'est-à-dire où les axes horizontal et vertical sont tracés suivant une échelle linéaire. Sur la dernière ligne, les barres d'erreur représentent l'écart-type des réponses.

De plus, le comportement était en accord avec la loi de la variabilité scalaire, qui stipule que le coefficient de variation ($\frac{\text{écart type des réponses}}{\text{réponse moyenne}}$) est indépendant de la numérosité. Pour chaque sujet, nous avons calculé les coefficients de variations (CVs) pour toutes les numérosités à partir de 25, et les avons soumis à une analyse de régression linéaire en fonction de la numérosité. Les pentes issues de cette régression, qui décrivent comment le coefficient de variation varie en fonction de la numérosité, ne différaient pas significativement de 0 [t(4)=0.46; valeur des pentes comprises entre -0.0004 et 0.0006].

Nous avons utilisé un deuxième test pour prouver la stricte linéarité entre l'écart-type de réponse et la réponse moyenne : une régression log-log. La loi de la variabilité scalaire prédit que le logarithme des écarts-types doit être une fonction linéaire du logarithme de la réponse moyenne, avec une pente de 1 $(\log(\text{écart_type}(n)) = \log(R(n)) + \gamma)$. Si nous obtenions une pente différente de 1, cela signifierait que la relation entre les écarts-types et la réponse moyenne est une fonction plus complexe, de forme puissance. Chez 4 des 5 sujets, la pente ne différait pas significativement de 1 [pentes de ces sujets : 0.86 à 1.31 ; pour le dernier sujet PQ la pente était de 1.39, p=0.005].

Un simple examen de la figure 5.9 suffit pour voir que les fonctions de réponse R(n) ne sont pas linéaires. En suivant l'analyse que nous avons développée dans le paragraphe 5.3.2, nous avons régressé les réponses des sujets sur un modèle à deux régresseur (linéaire et quadratique). Selon les sujets, la régression expliquait 97% à 98% de la variance. Le poids associé au régresseur non-linéaire variait entre -3.1 et -1.6, indiquant la présence d'une forte composante non-linéaire dans les fonctions de réponse. De plus, ces poids se situaient à l'extérieur de l'intervalle critique [-0.5 0.5] chez tous les sujets [toutes valeurs de p<0.0001, sauf pour le sujet BF : p<0.05]. Cette forme non-linéaire des fonctions de réponse est incompatible avec une échelle interne linéaire $q_n = n$.

On relève une très grande variabilité dans l'ampleur de la sous-estimation des sujets. Par exemple, le stimulus moyen ayant mené à la réponse '30' valait respectivement 75.4 pour le sujet ML, 71.7 pour PQ, 60.8 pour AL, 58.6 pour DC et 82.1 pour BF. Cette variabilité se retrouve au niveau des exposants de la fonction de réponse puissance. Nous avons employé une régression log-log pour estimer l'exposant de la fonction de réponse R(n): c'est-à-dire que nous avons fait une régression linéaire entre le logarithme de la réponse moyenne et le logarithme de la numérosité. La pente de cette régression correspond alors à l'exposant de la fonction puissance $(R(n) = a * n^b)$ expliquant au mieux les données. La régression expliquait 93% à 97% de la variance pour les différents sujets, et les exposants étaient compris entre 0.57 et 0.76 (0.66 en moyenne). Comme nous nous y attendions après l'analyse à deux régresseurs décrite ci-dessus, tous les exposants étaient significativement différents de 1 [toutes valeurs de p<0.0001].

Expérience 3.2 : réponses après avoir vu une référence

Les réponses suivent la loi de la variabilité scalaire Les données suivaient la même structures que pour les sujets n'ayant vu aucune référence (voir figure 5.10). Les réponses augmentaient de manière monotone avec la numérosité et suivaient la loi de la variabilité scalaire : comme notre modèle le prédit, l'écart-type des réponses était proportionnel à la réponse moyenne. Le coefficient de variation des réponses (\frac{\text{écart-type}}{\text{moyenne}}) était donc constant. Pour le vérifier, nous avons utilisé les mêmes analyses que pour la première expérience. Tout d'abord nous avons fait tourner une régression linéaire entre le coefficient de variation et la numérosité. Pour les groupes où la référence est sur-estimée ou exacte, la pente de cette régression n'était pas significativement différente de zéro [groupe avec sur-estimation : pente=0.0008, p=0.05; groupe avec référence exacte : pente=0.0013, p=0.12]. Pour le groupe avec référence sous-estimée, la pente était significativement différente de zéro mais très faible [pente=-5.10^-5, p<0.001]. Dans un deuxième temps, nous avons utilisé

une régression log-log entre l'écart-type et la réponse moyenne. Les pentes obtenues dans cette régression étaient proche de 1, bien qu'elles s'écartent significativement de 1 dans les groupes avec référence sur-estimée et exacte [groupe avec référence sur-estimée : pente=1.17, p=0.02 ; groupe avec référence exacte : pente=1.21, p<0.0001]. Dans le groupe avec référence sous-estimée par contre, la pente n'était pas différente de 1 ce qui indiquait que la variabilité était strictement scalaire [pente=1.02, p=0.7]. Nous concluons de ces analyses que nos données suivent approximativement la loi de la variabilité scalaire, mais pas tout à fait parfaitement.

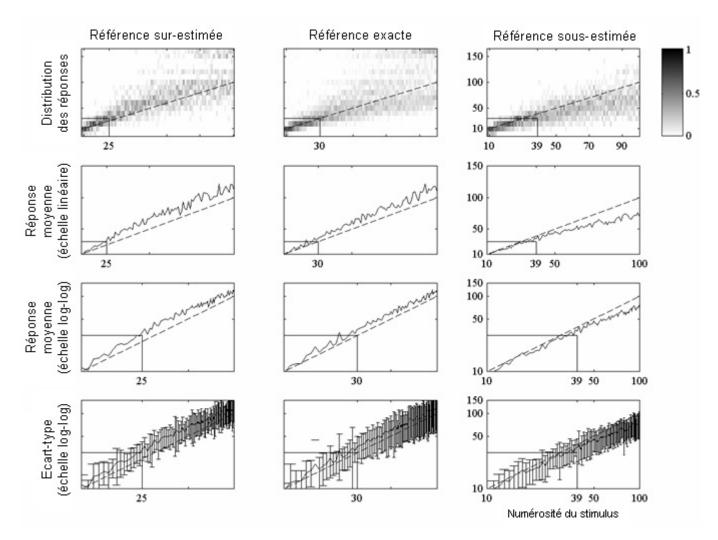


FIG. 5.10 – Réponses des 3 groupes de sujets ayant reçu une référence (format de présentation identique à la figure 5.9). Un nuage de référence, censé contenir 30 points, était présenté à chacun des sujets. Pour le groupe avec référence sur-estimée, ce nuage contenait 25 points; pour le groupe avec référence exacte, il contenait 30 points; pour le groupe avec référence sous-estimée, il contenait 39 points.

Influence de la référence sur l'estimation des numérosités. Les sujets ayant reçu une référence parviennent à adapter leurs réponses assez précisément à notre indication. La moyenne des stimuli menant à la réponse '30' était de 27.4, 31.5, et 40.1 respectivement dans les groupes avec référence sur-estimée, exacte et sous-estimée. Cette différence approche la significativité [F(2,21)=3.32, p=0.056]. Pour les trois groupes, la distribution des stimuli associés à '30' diffère significativement des stimuli associés par les sujets sans référence [toutes valeurs de p<0.01].

La valeur de la référence avait un effet sur l'ensemble des numérosités présentées, ce qui nous a permis de rejeter l'hypothèse que les sujets se soient calibrés de manière locale. Nous avons groupé les stimuli en 10 niveau de numérosité ($[9\ 14]$, $[15\ 24]$, ..., $[85\ 94]$, $[95\ 100]$), et fait tourner une analyse de variance avec comme facteurs la numérosité (10 niveaux) et la référence (3 niveaux). La numérosité avait un effet significatif $[F(9,189)=105.47,\ p<0.0001]$ et interagissait avec la référence $[F(18,189)=2.17,\ p=0.0054]$. Les réponses numériques augmentaient plus lentement dans la condition où la référence est élevée (sous-estimée) (voir figure 5.10). Cet effet n'était pas restreint au voisinage de la valeur de la référence, mais étendu à tout l'ensemble des numérosités étudiées : même pour les numérosités $[95\ 100]$, les réponses restaient significativement plus petites dans le groupe avec référence sous-estimée que dans le groupe avec référence sur-estimée $[F(1,10)=6.00,\ p=0.03]$. Cependant, quand nous considérions les trois références à la fois, la comparaison n'atteignait pas la significativité $[F(2,21)=2.35,\ p=0.12]$, parce que les trois niveaux étaient trop proches entre eux.

Après la pause, dans la deuxième partie de l'expérience, les sujets recalibraient leurs réponses sur la nouvelle valeur de référence. Nous avons séparé les sujets en deux groupes : ceux dont la première référence était moins numéreuse que la deuxième, ceux pour qui la première référence était plus numéreuse que la deuxième. Nous avons utilisé une analyse de variance avec pour facteurs la session expérimentale (première ou deuxième partie), le groupe (2 niveaux), et la numérosité (10 niveaux définis comme auparavant). A côté d'un effet de la numérosité [F(9,189)=124, p<0.0001], nous avons relevé un effet de la session expérimentale [F(1,22)=10.5, p=0.0038], qui interagissait avec la numérosité [F(9;198)=13.23, p<0.0001]. Ces effets indiquent que les numérosités étaient dans l'ensemble plus sous-estimées lors de la session, particulièrement pour les grandes numérosités. Ce qui est plus important, c'est que nous avons obtenu une interaction entre le groupe et la session [F(1,22)=10.7, p=0.0035], ainsi qu'une triple interaction très forte [F(9,189)=4.75,p<0.0001]. Ces deux effets indiquent que les sujets se réadaptent différemment selon que la deuxième référence contient plus ou moins de points que la deuxième : les sujets pour qui la première référence contenait moins de points ont diminué leurs réponses dans la deuxième partie de l'expérience. Au contraire, les sujets qui ont vu d'abord une référence contenant plus de points ont répondu à peu près de la même façon dans les deux parties. Ce processus de recalibration s'étend à tout l'intervalle de numérosités étudiées comme le premier processus de calibration. En effet, les mêmes analyses restreinte aux stimuli les plus numéreux ([95 100]) révélaient une interaction entre le groupe et la session [F(1,22)=5.06, p=0.0348], ainsi qu'un effet de la session [F(1,22)=15.19, p=0.0008].

Les réponses et la calibration sont bel et bien basées sur une représentation de la numérosité Est-ce que les sujets ont bien répondu sur la base d'une représentation de la numérosité, et non sur quelque paramètre non-numérique comme la densité ou la luminance totale des nuages? Nous sommes en mesure de répondre à cette question fondamentale, grâce aux contrôles que nous avons apportés lors de la construction des trois séries de stimuli. Ainsi, si un sujet se basait pour répondre seulement sur un paramètre non-numérique, ses réponses auraient été constantes sur au moins l'une des trois séries de stimuli. Au contraire,

les réponses augmentaient progressivement pour chacune des trois séries : pour chaque sujet, la pente que formaient les réponses par rapport à la numérosité était significativement supérieure à 0 pour chaque série de stimuli [1ère série : pentes de 0.4 à 2.4; 2ème série : pentes de 0.4 à 2.0; 3ème série : pentes de 0.4 à 2.4; toutes valeurs de p<0.00001].

De plus, en considérant la calibration sur la référence, nous pouvons formuler un deuxième argument réfutant l'utilisation de stratégies basées sur les paramètres non-numériques. Bien que nous venions de fournir une preuve que les sujets ne se sont pas basés sur un seul paramètre, il reste la possibilité qu'ils aient utilisé plusieurs paramètres, différents selon la série à laquelle appartenaient les stimuli. Par exemple, un sujet aurait pu utiliser la taille des points lorsque ceux-ci étaient petits, et la densité du nuage lorsque l'image était très dense, etc. Souvenons-nous alors que tous les stimuli de référence étaient générés selon les mêmes contraintes (ils appartenaient tous à la troisième série de stimuli) : de ce fait, quelque soit leur numérosité, ces nuages ont toujours la même densité et la taille des points est la même. Par suite, pour les essais où les sujets basent leurs réponses sur la densité ou la taille, nous ne devrions pas observer de différence de calibration pour les différentes références. Considérons maintenant la première série de stimuli : l'espace total occupé et la luminance totale sont constants, seuls la densité du nuage ou la taille des points permettraient au sujet de discriminer les stimuli. Si nous restreignons notre analyse aux stimuli de la première série, et si les sujets utilisent les paramètres non-numériques de bas niveau pour formuler leurs réponses, nous devrions observer : 1. des essais où la réponse ne dépend pas de la numérosité mais pourrait être différente selon la valeur de référence (ce sont les essais où le sujet se base sur l'espace total occupé ou sur la luminance totale) et 2. des essais où l'estimation ne change pas en fonction de la valeur de référence mais augmente avec la numérosité (les essais où le sujet se base sur la densité du nuage ou sur la taille des points). Si seulement ces deux types d'essais existent dans les données, il est alors impossible d'observer une différence de calibration qui varie avec la numérosité (voir figure 5.11). Au contraire, nous obtenons une interaction entre la numérosité, le groupe et la session expérimentale dans une analyse de variance utilisant les facteurs groupe, session, et numérosité, restreinte à la première série de stimuli [F(9,189)=4.21, p=0.0001]. Ce résultat exclut la possibilité que les sujets se soient basés sur un paramètre non-numérique, même s'ils changeaient de paramètre à chaque essai. Néanmoins, nous reconnaissons que nous ne pouvons pas rejeter la possibilité que les sujets aient utilisé une combinaison complexe de deux ou plusieurs paramètres pour répondre (multipliant la densité par l'espace total occupé, par exemple). En fait, il se peut que le système visuel procède à l'extraction de la numérosité en utilisant justement une telle combinaison de paramètres [Allik and Tuulmets, 1991, Frith and Frith, 1972].

Forme des fonctions de réponse Les réponses des sujets prenaient-elles la forme d'une fonction linéaire ou puissance? Pour répondre à cette question, nous avons utilisé l'analyse introduite dans le paragraphe 5.3.2, et que nous avons déjà appliquée aux sujets n'ayant pas vu de référence. Les réponses moyennes de chaque sujet ont été soumises à une régression avec un modèle à deux facteurs : un facteur linéaire, et un facteur quadratique, orthogonalisé par rapport au premier. La poids associé au régresseur quadratique pour chaque groupe de sujets était ensuite comparé à sa valeur théorique, simulée à partir d'une échelle

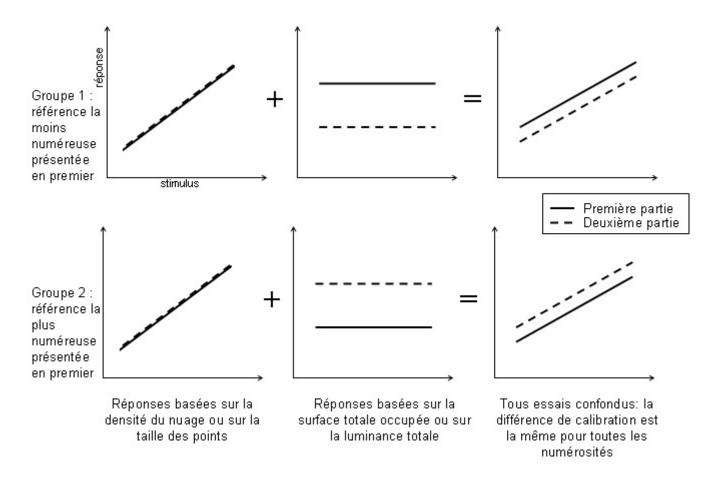


FIG. 5.11 – Réponses prédites pour un sujet qui ne se baserait que sur les paramètres non-numériques, pour les stimuli de la première série. Dans la deuxième partie de l'expérience, on présente une référence différente au sujet. Lorsque celui-ci répond sur la base de la densité du nuage ou de la taille des points (stratégie choisie avec la probabilité p), il ne doit y avoir aucune différence entre les deux parties. Lorsqu'il répond sur la base de la surface totale occupée ou de la luminance totale (probabilité 1-p), les réponses ne peuvent pas être influencées par la numérosité. Au total, sur tous les essais, la différence entre les estimations produites dans les deux parties est la même pour toutes les numérosités. Il ne peut pas y avoir de triple interaction entre la numérosité, le groupe et la partie.

logarithmique, linéaire ou puissance. Les régressions expliquaient en moyenne 91% de la variance (de 81% à 95% selon les sujets). Les fonctions de réponse tendaient à être non-linéaires, bien que pour certains sujets il ne fût pas possible de rejeter l'hypothèse d'une fonction linéaire. En tout, pour 11/24 sujets le poids associé au régresseur quadratique était en-dehors l'intervalle critique [-0.5 0.5] et significativement différent de ses deux extrémités, ce qui nous permet de rejeter le modèle d'échelle interne linéaire pour ces sujets. Si la conclusion tirée de cette deuxième expérience est moins forte que celle de la première expérience, c'est que dans le cas présent la donnée d'une référence aidait les sujets à être plus proches du comportement optimal où la fonction de réponse est linéaire $(R(n) \approx n)$, et où les prédictions des trois échelles sont à peu près équivalentes.

Cependant, les résultats de la première expérience, ainsi que la présence de 11 sujets dans la deuxième expérience avec des réponses non-linéaires, nous amènent à conclure que la forme générale de la fonction de réponse R(n) est une fonction puissance. Nous avons ensuite utilisé une analyse log-log pour estimer la valeur de l'exposant de cette fonction puissance. Le logarithme des réponses était confronté au logarithme de la numérosité, et la pente de cette régression nous donnait une estimation de la valeur de l'exposant. La régression expliquait en moyenne 89% de la variance (80% à 93%). En moyenne sur tous les sujets, l'exposant était de 0.96 (0.69 à 1.23), mais sa valeur différait significativement de 1 pour 23/24 sujets.

Est-ce que les variations enregistrées sur la valeur de l'exposant reflètent le processus de calibration? En considérant la valeur moyenne de l'exposant, qui était de 0.66 dans la première expérience et de 0.96 dans la deuxième [Test T de Welch à deux échantillons : T(16.0)=6.2, p<0.0001], il est tentant de donner une réponse positive à cette question. Cependant, la différence entre les groupes de l'expérience 2 ayant vu des références différentes n'était pas assez stable pour atteindre la significativité [F(2,21)=1.35, p=0.28]. Nous avons soumis les intercepts de la régression log-log au même test et de la même façon n'avons pas trouvé de différence entre les groupes [F(2,21)=0.49, p=0.6].

Notons que l'analyse ci-dessus cherche des différences dûes à la valeur de la référence entre des groupes de sujets différents, et a pu échouer à cause d'une trop grande variabilité entre les sujets. Pour tester cette idée, nous avons utilisé la deuxième partie de l'expérience, où les mêmes sujets voyaient une valeur de référence différente. Nous avons appliqué une analyse de variance à la pente et à l'intercept de la régression log-log, avec un facteur inter-sujets (2 groupes : référence la moins numéreuse en premier, référence la plus numéreuse en premier, voir à ce sujet le paragraphe 5.3.3), et un facteur intra-sujet (session expérimentale). Nous n'avons trouvé d'interaction entre le groupe et la session dans aucune des deux analyses, ce qui indique que ni la pente ni l'intercept peut être tenu seul comme objet du processus de recalibration. Néanmoins, nous observons un effet de la session pour les deux analyses [exposants : F(1,22)=29.8, p<0.001 | intercept : F(1,22)=22.9, p<0.001] : dans le deuxième partie de l'expérience, la pente est plus faible et l'intercept est plus grand. En résumé, la pente et l'intercept de l'analyse log-log varient effectivement au cours du processus de calibration (c'est-à-dire qu'ils sont différents entre les expériences 1 et 2), mais leur variation n'est pas suffisamment systématique d'un sujet à l'autre pour que ces variations atteignent un niveau significatif dans l'expérience 2 prise seule.

Estimation de la courbe d'activation et de la fraction de Weber

Suivant les prescriptions de Thurstone, notre modèle postule que la perception répétée d'un même nombre engendre une distribution d'activations normale sur la ligne numérique. En partant des réponses des sujets, nous avons pu reconstruire la distribution des activations, justifiant par là le choix d'une distribution normale. Dans le modèle, la probabilité de donner la réponse R pour un stimulus de numérosité n est : $p(R|n) = \int_{c_-(R)}^{c_+(R)} p(x,n) dx$, où p(x,n) est la densité de probabilité d'observer une activation au point x pour un stimulus de numérosité n. Ici, nous cherchons à estimer p directement à partir de la distribution des réponses des sujets. Nous avons travaillé à partir d'une échelle logarithmique, parce que les calculs étaient beaucoup plus simples que pour une échelle puissance. Pour un sujet donné, à chaque fois que nous observons une réponse R à la suite d'un stimulus de numérosité n, cela signifie que l'activation est tombée sur la ligne numérique entre les points $c_-(R)$ et $c_+(R)$. Comme nous ne pouvons pas dire où se trouvait cette activation exactement, nous avons adopté un point de vue conservatif en modélisant l'activation pour cet essai par un rectangle d'aire 1, dont la base allait de l'abscisse $c_-(R)$ à $c_+(R)$. En suivant cette procédure, nous avons construit une courbe d'activation pour chaque numérosité en accumulant des rectangles. Les courbes ainsi obtenues ont ensuite été normalisées en divisant chacune par le facteur adéquat pour que son aire soit égale à 1.

Dans un deuxième temps, nous avons normalisé les courbes d'activations de chaque numérosité, pour obtenir une seule courbe d'activation valant pour toutes les numérosités. D'après la loi de Weber, la variance des courbes d'activation sur une échelle logarithmique doit être constante, donc si nous recentrions simplement chaque courbe sur l'abscisse 0, nous devions obtenir la même courbe pour toutes les numérosités. De plus, il nous fallait prendre en compte la transformation affine imposée à la grille de réponse par les sujets. Pour chaque sujet, toutes les courbes obtenues pour les différentes valeurs de numérosités ont donc été translatées, pour les centrer sur 0, et les abscisses ont été multipliées par la pente de la régression log-log sur les réponses (selon notre théorie, cette pente est égale à l'inverse du paramètre d'étirement de la grille de réponse, voir à ce sujet l'équation pour le modèle logarithmique dans la table 5.1). Nous avons ensuite moyenné toutes les distributions normalisées associées à numérosités de 20 à 100 et avons ajusté le résultat sur une courbe gaussienne. La largeur de la courbe gaussienne fournit alors une estimation de la fraction de Weber interne w de chaque sujet. Enfin, nous avons moyenné les courbes d'activation de chaque sujet pour obtenir une courbe d'activation moyenne, et de nouveau confronté le résultat à une courbe gaussienne. La largeur de cette nouvelle gaussienne estime la fraction de Weber interne w pour toute l'expérience.

Comme on peut le voir sur la figure 5.12, la courbe que l'on obtient en suivant cette procédure est très proche d'une gaussienne. Selon les sujets, la courbe gaussienne expliquait 84% à 99% de la variance, et la fraction de Weber estimée variait entre 0.15 et 0.41. Pour la courbe d'activation moyenne, la gaussienne explique 99% de la variance, et la fraction de Weber interne w globale est estimée à hauteur de 0.22. Sur l'intervalle de la ligne numérique correspondant à 90% des activations, nous avons transformé la distribution en calculant les scores de Z associés. Si on trace les scores de Z en fonction de la numérosité, on obtient

une ligne droite passant par l'origine (figure 5.12 B) [pente=4.53=1/0.23, R²=0.999], on voit donc que la distribution des activations internes est extrêmement proche d'une gaussienne.

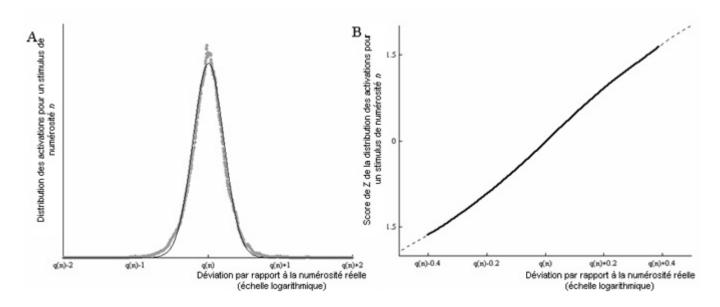


FIG. 5.12 – Reconstruction de la distribution des activations sur la ligne numérique interne. A. Distribution des activations sur la ligne numérique, moyennée à travers tous les sujets, ajustée sur une courbe gaussienne ($R^2 = 0.99$). L'écart-type de la gaussienne correspond à l'estimation de la fraction de Weber interne : w = 0.22. B. Score de Z de la distribution tracée en A., pour l'intervalle de la ligne numérique où sont concentrées 90% des données.

5.4 Discussion générale

Sur la base du formalisme de Thurstone, nous avons développé un modèle mathématique de la représentation de la numérosité, avec trois alternatives pour l'échelle interne : celle-ci est soit logarithmique, soit linéaire, soit une fonction puissance. Quelque soit l'échelle choisie, le modèle prédit que la loi de Weber apparaît au niveau des performances pour une tâche de comparaison, même si l'un des deux termes à comparer doit être d'abord calculé comme résultat d'une addition. Pour une tâche d'estimation de numérosité, les trois modèles prédisent que les réponses suivent la loi de la variabilité scalaire, c'est-à-dire que le coefficient de variation (écart type divisé par la moyenne) des réponses est indépendant de la numérosité. Pour les tâches de comparaison et d'addition, les prédictions des trois modèles sont essentiellement semblables, et s'accordent remarquablement bien avec nos données. Dans les deux cas, nous observons un effet de distance comparable, indiquant par là qu'il est possible de réaliser des opérations sur des stimuli non-symboliques. Pour la comparaison, les performances montrent des propriétés subtiles de symétrie qui s'accorderaient bien avec un modèle logarithmique. A propos de la tâche d'estimation cependant, les prédictions des trois modèles se différencient au niveau de la forme de la fonction de réponse moyenne R(n): les échelles linéaire et puissance prédisent que la fonction de réponse doit être linéaire, alors que l'échelle logarithmique prédit une fonction de réponse de forme puissance. Prenant parti de cette divergence, nous avons étudié l'estimation de numérosités, recueillant dans un premier temps des estimations spontanées (expérience 3.1). Dans un deuxième temps nous

avons calibré les sujets en leur montrant un ensemble de référence avant qu'ils ne se lancent dans la tâche (expérience 3.2). Bien que les estimations spontanées soient systématiquement sous-estimées, nous montrons qu'il est possible de calibrer les sujets, et que dans ce cas, la calibration opère sur toutes les numérosités à la fois. Le comportement des sujets, qu'il soient calibrés ou pas, montre une très grande régularité, que l'on peut caractériser par les deux lois suivantes : 1. ainsi que le prédisent tous les modèles, la variabilité des réponses est de type scalaire ; 2. les fonctions de réponses ne sont pas linéaires et par suite incompatibles avec une échelle interne linéaire. Ainsi, nos données constituent une preuve comportementale contre le modèle de la ligne numérique linéaire.

Lorsqu'on évalue la fiabilité d'un modèle mathématique, il est important de se souvenir des hypothèses sur lesquelles il s'appuie. Notre modèle, les conclusions que nous venons d'en tirer donc, reposent sur trois hypothèses clé. Tout d'abord, nous postulons que les sujets placent des critères sur leur ligne numérique interne pour résoudre les tâches. Pour la comparaison et l'addition, un seul critère suffit, pour l'estimation, il y a toute une liste de critères, qui séparent la ligne numérique en plusieurs segments associés avec les différentes réponses. Deuxièmement, nous avons spécifié la position de ces critères : ceci est fait en deux temps. D'abord, nous décrivons une situation optimale: pour la comparaison, la détection de changement, la position des critères optimaux est donné par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour l'estimation, les critères optimaux implémentent une stratégie où les sujets arrondissent, donnent la réponse la plus proche de la position de l'activation. Enfin, et c'est là notre troisième hypothèse, nous postulons que lorsque les sujets sont mal calibrés (c'est-à-dire, non optimaux), la liste des critères est transformée de manière globale, et correspond à l'image de la liste optimale par une transformation affine. Cette troisième hypothèse ne concerne pas la tâche de comparaison ni l'addition, mais nous l'utilisons pour la détection de changement (les critères effectifs sont symétriques autour de la valeur de la référence, mais la distance exacte entre la référence et les critères est laissée libre dans le modèle), et pour l'estimation. Il est important de remarquer qu'avec d'autres hypothèses, plus compliquées, par exemple en autorisant l'application de transformations non-linéaires à la liste de critères, les échelles linéaire et puissance pourraient aussi prédire que la fonction de réponse est de forme puissance. En utilisant simplement une transformation affine, notre modèle, plus parcimonieux, surpasse ces alternatives.

5.4.1 Sur la non-linéarité de l'échelle numérique

Dans notre tâche d'estimation, nous avons varié la valeur de référence pour explorer l'espace des fonctions de réponses possibles $R_{a,b}(n)$ et montrons que dans la plupart des cas la fonction de réponse est non-linéaire : les réponses spontanées de tous les sujets sont non-linéaires, et seuls quelques sujets produisent une fonction de réponse linéaire après qu'on leur ait donné une référence (probablement parce que notre référence les aidait à s'approcher du comportement optimal). Notre résultat concorde avec les observations de la psychophysique des années 80s, lorsque la méthode d'estimation de grandeur a été appliquée à de nombreux continua sensoriels. Cette méthode consiste à demander au sujet de juger de la taille du stimulus présenté, selon un continuum particulier (amplitude sonore, douleur, intensité lumineuse...), en utilisant des

nombres pour quantifier leur jugement : les réponses moyennes R(s) forment alors une fonction puissance de l'intensité du stimulus s ([Krueger, 1972, Krueger, 1982, Krueger, 1984], voir [Krueger, 1989] pour une revue sur la tâche d'estimation de grandeurs). Traditionnellement, la fonction de réponse de forme puissance que l'on obtenait était cependant considérée comme un reflet direct de l'échelle interne, supposément de forme puissance elle aussi. Ici, nous avons introduit un modèle théorique quantitatif précis, pour décrire le processus menant à la production d'une réponse verbale. Notre théorie établit que la relation entre l'échelle interne q_n et la fonction de réponse R(n) dans une expérience d'estimation n'est pas aussi transparente qu'on aurait pu le penser à priori. En particulier, nous avons montré que la forme d'une fonction puissance ne peut être compatible qu'avec une ligne numérique compressée.

Les résultats de notre tâche de comparaison viennent renforcer la thèse d'une ligne numérique logarithmique. En effet, les performances des sujets ne sont symétriques que si on les trace sur un échelle logarithmique. Dans une expérience de comparaison classique, cette même propriété de symétrie émerge simplement de la loi de Weber elle-même : en effet deux numérosités symétriques par rapport à la référence sur un axe logarithmique entrent dans le même rapport avec celle-ci $(n_1 = \alpha n_0, n_2 = \frac{n_0}{\alpha})$, et seront donc comparées à la référence avec le même taux d'erreurs. Ici, la situation est particulière, car la référence, qui reste la même pour tout un bloc, est présentée plusieurs fois à chaque essai, a été assez répétée pour que le sujet s'en soit formé une représentation exacte. Nous ne sommes donc plus dans le cas où les deux nombres à comparer ont un statut équivalent, et la loi de Weber ne s'applique plus lorsqu'on veut comparer les performances pour αn_0 et $\frac{n_0}{\alpha}$. Dans ce cas, le modèle logarithmique prédit que les performances restent symétriques sur un axe logarithmique, comme elles le sont dans une tâche de comparaison classique; les modèles linéaire et puissance prédisent d'autres propriétés de symétrie plus compliquées à décrire et à tester. Nous vérifions dans nos données que celles-ci semblent bel et bien symétriques sur un axe logarithmique, mais n'avons pu tester si la symétrie de type logarithmique s'accorde mieux aux données que les autres propriétés issues des autres modèles. Notre observation doit donc être prise comme un indice de validité du modèle logarithmique, non comme un rejet des deux autres modèles, question sur laquelle seule la tâche d'estimation nous permet de statuer.

Pour revenir à l'estimation, nos résultats montrent que même si les fonctions de réponse sont toujours de la forme puissance, l'exposant n'en est pas fixé, même pour un sujet donné. Ceci pourrait expliquer pourquoi il n'y a jamais eu de consensus autour de la valeur exacte de l'exposant de la fonction de réponse, malgré de nombreuses tentatives pour l'évaluer [Krueger, 1982, Krueger, 1989]. La variabilité au niveau des exposants et intercepts de la fonction de réponse pourrait résulter de ce que les sujets ne reçoivent habituellement jamais d'indice objectif et exact sur l'estimation des grands nombres, et se calibrent implicitement, au cours de l'enfance, sur un ensemble d'indices partiels. Dans la lignée de cette idée, Siegler et Opfer [Siegler and Opfer, 2003] ont montré que les enfants de 8 à 10 ans produisent une ligne compressée, non-linéaire, lorsqu'on leur demande de placer des nombres sur une ligne physique. A 12 ans, ils se comportent comme des adultes et parviennent sans difficulté à disposer les nombres de manière régulière sur la ligne. La précision dont les sujets font preuve dans cette tâche, comparée à notre tâche d'estimation, pourrait découler

de ce que les sujets reçoivent systématiquement deux points de référence (les deux points 0 et 1000 placés à l'extrêmité du segment) à chaque essai, ce qui leur suffirait selon notre modèle à fixer les deux paramètres de la transformation affine et à se calibrer de manière optimale.

Notre modèle ne spécifie pas exactement où apparaissent les non-linéarités dans l'encodage de la numérosité. A ce sujet, Dehaene et Changeux [Dehaene and Changeux, 1993] ont proposé un modèle de réseau de neurones décrivant comment la numérosité est extraite. Dans ce modèle, ils placent l'émergence d'une compression logarithmique au niveau d'une population de détecteurs de numérosité. Il s'agit d'une population de neurones accordés chacun sur une valeur de numérosité : ces détecteurs réagissent principalement lorsque leur numérosité préférée est présentée, mais également, et dans une moindre mesure, lorsqu'on présente une numérosité voisine. Plus la numérosité préférée est grande, moins l'accord du détecteur est précis, ce qui crée une métrique de similarité non-linéaire entre les numérosités. Quel que soit le processus de décodage qu'on applique à cette population de détecteurs, le résultat sera sensible à la non-linéarité présente dans l'encodage initial. En accord avec le modèle de Dehaene et Changeux, des cellules sensibles à la numérosité ont été récemment enregistrées dans les cortex pariétaux et préfrontaux des primates [Nieder and Miller, 2004] avec un profil de réponses centré autour d'une numérosité préférée (voir dans [Piazza et al., 2004] des observations comparables chez l'humain). Comme les détecteurs du modèle, ces cellules réagissent plus intensément à une certaine numérosité, mais déchargent aussi quand on présente une numérosité voisine. De plus, les courbes d'accord ne sont symétriques que quand on les trace sur un axe logarithmique : les niveaux d'activités sont plus similaire pour deux nombres grands que pour deux nombres petits. Ainsi, les détecteurs de numérosité pariétaux pourraient constituer la substrat neural d'une représentation numérique compressée, que nous mettons en évidence dans la tâche d'estimation. Ces données sont encore assez récentes, et on peut se demander si ces neurones constituent le code primaire pour la numérosité, ou s'il existe quelque part dans le cerveau une population avec un code non-compressif (par exemple, un code linéaire à variabilité scalaire), dont dériverait le code compressif observé par Nieder et Miller.

5.4.2 De la précision de la représentation de numérosité

Jusqu'ici on utilisait la fraction de Weber comportementale pour quantifier la précision des représentations numériques; à cette mesure dépendante de la tâche, nous avons substitué la fraction de Weber interne w, qui mesure la dispersion des activations sur la ligne numérique. Pour les tâches de comparaison, de détection de changement, et d'addition, l'estimation de w est faite directement à partir des équations du modèle. Les deux premières tâches donnent deux valeurs très semblables (w = 0.170 - 0.174); pour l'addition, on trouve une fraction de Weber interne très élevée (w = 0.33), mais notre expérience ne comptant que très peu d'essais n'avait pas vocation à en donner une estimation fiable. A partir des données d'estimation, nous avons reconstruit la distribution des activations sur la ligne numérique : nous obtenons alors une courbe gaussienne sur une échelle logarithmique. En ajustant une gaussienne à la courbe estimée, nous avons estimé la largeur de la courbe à hauteur de w = 0.22. Cette valeur est légèrement supérieure à celle que l'on trouve dans la littérature. Notons en fait que dans notre expérience d'estimation, contrairement à toutes les

situations qui ont permis d'estimer la fraction de Weber jusqu'ici, on ne donne au sujet aucune indication sur la justesse de ses réponses. En leur indiquant si leurs réponses sont correctes, on peut aider les sujets à identifier les paramètres non-numériques qui biaisent leurs réponses, et de fait la fraction de Weber interne apparaitra plus faible. Deuxièmement, lorsque les précédentes tentatives pour estimer la fraction de Weber ont été menées, les auteurs ne contrôlaient pas toujours qu'aucun paramètre non-numérique ne fût confondu, et il est possible que les sujets aient utilisé ces paramètres pour améliorer leur performance. La première estimation de la fraction de Weber interne est donnée par Van Oeffelen et Vos [van Oeffelen and Vos, 1982]; chez eux w = 0.11. Dans leur expérience, plusieurs paramètres non-numériques, comme la luminance totale ou la densité des nuages, étaient confondus avec la numérosité. Nous savons par ailleurs que ces paramètres influent notablement sur l'estimation de la numérosité [Allik and Tuulmets, 1991, Frith and Frith, 1972], et ceci peut expliquer pourquoi la valeur qu'ils trouvent est plus faible que les nôtres. Dans nos expériences de comparaison et de détection de changement, nons avons contrôlé les paramètres non-numériques et trouvons une fraction de Weber interne de 0.17. La différence avec la valeur trouvée dans l'expérience d'estimation peut provenir de deux sources : du fait d'abord que pour la comparaison et la détection de changement nous avons systématiquement corrigé les sujets à chaque essai, et de notre méthode d'estimation de la fraction de Weber interne pour l'estimation, qui requiérait d'estimer d'abord la transformation appliquée par chaque sujet aux critères de réponses. Si des erreurs se glissent au moment d'estimer cette transformation, la courbe d'activation moyenne se trouve étalée, et la valeur de w apparait plus élevée qu'elle n'est en réalité.

Quelle réalité se cache derrière la fraction de Weber interne w? Notons tout d'abord que dans notre modèle, nous ignorons les temps de réponse; or chacun sait que, plus on presse les sujets à répondre rapidement, plus leurs réponses sont imprécises. Notre modèle se place dans le cas idéal où le sujet disposerait d'un temps infini pour répondre, et formulerait la meilleure réponse possible. Dans aucune des expériences que nous présentons ici, les sujets n'étaient pressés pour répondre; mais ceux-ci adoptent généralement un rythme soutenu assez rapidement. Au-delà de cette difficulté que nous aurons du mal à contourner dans le cadre de notre modèle (celui-ci n'incorporant absolument pas la dimension temporelle des réponses), et en admettant que nous avons réussi à nous placer dans le cas idéal où les réponses sont mûrement décidées, nous voyons deux phénomènes qui pourraient contribuer à la dispersion des activations. Jusqu'ici nous avons invoqué un bruit interne situé au niveau des représentations numériques elles-mêmes; mais une partie du bruit que l'on observe au niveau de la représentation de numérosité doit être issu du mécanisme même qu'emploie le système visuel pour extraire la numérosité d'un stimulus. On connait, par exemple, l'effet systèmatique de la densité sur l'estimation de la numérosité [Krueger, 1972, Hollingsworth et al., 1991] : les stimuli apparaissant plus denses sont plus largement sous-estimés. Vraisemblablement un tel effet systématique se situe au niveau d'étapes antérieures à l'encodage de la numérosité. Dans notre corpus de stimuli, les plus denses seront donc sous-estimés par rapport aux autres, créant une dispersion supplémentaire des réponses au niveau de l'ensemble des stimuli. Dans le cadre d'un projet qui sera abordé l'année prochaine, nous tenterons de séparer les différentes composantes du bruit, en n'employant pour chaque numérosité que des stimuli visuels présentant les mêmes caractéristiques, et en confrontant les performances en estimation entre différentes modalités (modalités visuelle, auditive).

5.4.3 Du processus de calibration

Nos résultats montrent que la donnée d'une seule référence est suffisante pour calibrer l'estimation de numérosités, même si spontanément, les réponses seraient très loin de celle indiquée par l'essai de référence. La présentation d'un unique essai de référence a un large impact sur le comportement des sujets, non seulement au voisinage de la numérosité de référence, mais sur tout l'intervalle de numérosités testé. Ce résultat rappelle les observations réalisées par Minturn et Reese [Minturn and Reese, 1951] et par Krueger [Krueger, 1984], qui constataient qu'en donnant aux sujets un retour sur leurs réponses, ceux-ci devenaient énormément plus précis. En introduisant plusieurs conditions et une référence parfois fausse, nous avons gagné des informations supplémentaires sur le processus de calibration. Nous expliquons nos résultats en introduisant l'idée que les sujets appliquent une transformation affine à leur grille de réponse, pour la faire concorder avec l'essai de référence. De plus, lorsqu'on présente aux sujets une deuxième référence, incompatible avec la première, ils se recalibrent à nouveau, et de nouveau la calibration a lieu sur l'ensemble des numérosités testées. Nous en concluons qu'il n'existe pas de lien solide entre les représentations non-verbales de numérosité et les noms des nombres, et que le processus de calibration de la ligne numérique qui permet de fixer ces liens est global; de plus, il suffit d'une seule indication pour fixer les paramètres flottants associant la ligne numérique et la liste des noms de nombres.

Nos expériences ne permettent pas de savoir à quel niveau la calibration a lieu. Il est possible que la calibration soit un processus purement stratégique, au cours duquel les sujets modifient consciemment et intentionnellement leurs réponses pour les accorder à l'essai de référence. Certains sujets reportent par exemple qu'ils évaluaient le ratio entre le stimulus courant et son prédécesseur, et calculaient leur réponse d'après la réponse précédente. Il est possible également que la calibration résulte d'un apprentissage automatique, inconscient, d'une association entre les représentations sur la ligne numérique interne et les mots numériques. Vraisemblablement, la calibration est un mélange de deux composantes, l'une stratégique et l'autre automatique, car les sujets reportent bien avoir corrigé leur réponses après avoir vu la référence, mais sans pour autant avoir eu l'impression de devoir appliquer une correction aussi importante que le suggère la différence entre les réponses spontanées et les réponses calibrées. Par ailleurs, on peut poser une deuxième question, orthogonale à la première : la calibration modifie-t-elle les positions elles-mêmes des activations sur la ligne numérique, ou sont-ce les critères de réponses qui sont modifiés? Dans la description de notre modèle, ce sont les critères qui sont transformés, mais les prédictions qu'on dérive sur la forme des fonctions de réponse sont également valables dans le cas où la position des activations est modifiée aussi, pourvu que les activations et les critères subissent des transformations de type affine.

Enfin, pour ouvrir encore quelques perspectives pour de futurs travaux, nous n'avons pas trouvé d'explication au phénomène récurrent de sous-estimation. Tous les sujets répondant de manière spontanée ont produit des estimations sous-estimées; quant aux sujets calibrés, on voit qu'il est plus facile de les induire à sous-estimer qu'à sur-estimer. A cela s'ajoute un phénomène référencé depuis les années 50, selon lequel les réponses ont globalement tendance à diminuer au cours de l'expérience. Il a été reporté également que le

temps de présentation des stimuli influait sur la quantité de sous-estimation. Il semble que les paramètres de la grille de réponse a et b soient contraints à évoluer dans un espace restreint (en général, a serait supérieur à 1 ce qui pousse à la sous-estimation). Il reste encore beaucoup de travail pour délimiter cet espace de valeurs, et comprendre comment le contexte expérimental pousse à choisir des valeurs précises dans cet espace.

RÉSUMÉ - Validation expérimentale du modèle

Nous testons notre modèle de la ligne numérique à travers trois séries d'expériences :

- comparaison (le stimulus contient-il plus ou moins de points que la référence?), et détection de changement (le stimulus contient-il le même nombre de points que la référence?)
- addition et soustraction de numérosités (le résultat de l'opération est-il plus ou moins numéreux que le stimulus proposé en comparaison ou quelle est la numérosité du resultat?)
- estimation de numérosités (combien ce nuage contient-il de points?)

Les performances s'accordent remarquablement bien aux prédictions, et conduisent à l'estimation de la fraction de Weber interne w, comprise entre 0.17 et 0.30 selon les tests. Les expériences de comparaison, de détection de changement et d'addition ne permettent pas de séparer les trois alternatives pour l'échelle interne (échelle logarithmique, linéaire ou puissance), mais notre modèle de la tâche d'estimation donne des prédictions différentes selon l'échelle choisie. Pour une échelle linéaire, la fonction de réponse, donnant la réponse moyenne pour chaque numérosité, même si elle n'est pas juste, est toujours linéaire. Dans le cas d'une échelle compressive, et plus particulièrement pour une échelle logarithmique, la fonction de réponse prédite suit la forme d'une fonction puissance. Comme cela avait été observé dans les années 80s, nos données d'estimation confirment que la forme des fonctions de réponse des sujets n'est pas linéaire, les données sont donc incompatibles avec un modèle linéaire.

Par ailleurs, notre étude sur l'estimation prouve qu'il est possible de *calibrer* les réponses des sujets, et que le processus de calibration est global. Nous montrons une seule référence, concernant une seule numérosité et tout l'ensemble des réponses, pour toutes les numérosités que l'on présente, s'en trouvent modifiées.

Deuxième partie

Sensibilité des bébés à la numérosité

Chapitre 6

Corrélats cérébraux des représentations numériques

La première partie de mon travail s'intéressait à la représentation de la numérosité en elle-même et tâchait d'en donner une caractérisation fine, sous la forme d'un modèle mathématique. Nous abordons dans cette deuxième partie la question du développement de la cognition numérique. A l'aide de la technique des potentiels évoqués¹, nous avons recherché une sensibilité à la numérosité chez le bébé de 3 mois. Les deux chapitres de revue qui suivent abordent deux thématiques utiles pour interpréter les résultats de notre étude. Nous présentons ci-dessous l'état des connaissances sur le substrat cérébral de la cognition numérique. Dans le chapitre suivant, nous traiterons la question des petits nombres chez les jeunes enfants, qui fait débat actuellement.

6.1 Premières études d'imagerie à faible pouvoir localisationnel

Au cours des vingt dernières années, l'étude des activations cérébrales liées au calcul mental a suivi les progrès des techniques d'imagerie fonctionnelle. Ainsi, dès 1985, Roland et Friberg, pionniers de l'imagerie du calcul, utilisent la Tomographie par Emission de Positons (TEP), selon le procédé aujourd'hui dépassé d'injection de Xe¹³³, et enregistrent un large réseau fronto-pariétal, activé tandis que le sujet effectue mentalement une suite de soustractions. Roland et Friberg, dont l'ambition ne se limitait pas au calcul mental, s'enthousiasment d'avoir trouvé en ce réseau le siège de la pensée symbolique humaine. Une dizaine d'années plus tard (soit le temps qu'il a fallu pour développer et tester des techniques d'imagerie plus facilement maniables, et moins invasives), le même réseau apparaît avec la TEP (procédé plus moderne d'injection de H₂O¹⁵) [Ghatan et al., 1998, Jong et al., 1996] puis l'Imagerie par Résonnance Magnétique fonctionnelle (IRMf) [Burbaud et al., 1995, Burbaud et al., 1999, Rueckert et al., 1996]. Ces derniers auteurs continuent d'utiliser des tâches cognitives aussi complexes que la tâche de soustractions successives, qui en plus de faire appel à un code numérique, implique des mécanismes non spécifiques pour l'identification des stimuli, la

¹Etude du signal d'électroencéphalogramme évoqué par la présentation d'un stimulus

planification des opérations mentales, la mémorisation des résultats intermédiaires. Les activations dans la condition de calcul sont contrastées par rapport à des périodes de repos. Peu informatives sur le rôle propre de chaque région au sein du réseau fonctionnel identifié, ces premières études ont convaincu une deuxième génération d'expérimentateurs de la nécessité de définir une tâche contrôle plus à même d'isoler les processus cognitifs d'intérêt, et de décomposer leurs tâches afin de tester des contrastes plus fins. Parallèlement, le développement des techniques d'acquisition et d'analyse statistique des images ont favorisé l'émergence de protocoles plus riches, contrastant plusieurs situations expérimentales.

6.2 La partie horizontale du sillon intrapariétal : un code quantitatif

Si les premières études, en accord avec les premières observations neuropsychologiques de Gerstmann, Hécaen, Henschen, soulignent l'implication du lobe pariétal dans les tâches numériques, les résultats les plus récents convergent plus précisément vers la partie horizontale du lobe pariétal (PHSI, coordonnées : à droite -44 -48 47, à gauche 41 -47 48 [Dehaene et al., 2003]) (pour les localisations, voir la figure 6.1). Les paragraphes suivants résument les propriétés connues de cette région cérébrale, pressentie comme le lieu d'un code sémantique où les nombres sont transcrits sous forme de quantités.

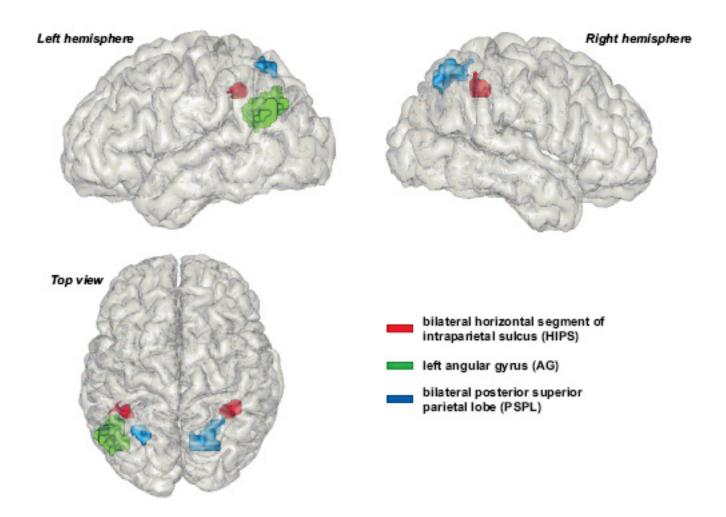


FIG. 6.1 – Localisation des régions pariétales considérées dans ce chapitre. Reproduit depuis [Dehaene et al., 2003].

6.2.1 Activation de la PHSI dans des opérations arithmétiques

Au début des années 2000, une série d'études ont mesuré et contrasté entre elles les activations cérébrales liées à différentes opérations arithmétiques. La PHSI se trouve plus activée lorsqu'il faut effectuer des calculs que pour une simple lecture de chiffres [Burbaud et al., 1999, Chochon et al., 1999, Pesenti et al., 2000] ou de lettres [Simon et al., 2002]; et s'active encore plus lorsqu'il y a deux calculs [Menon et al., 2000]. Parmi les différentes opérations arithmétiques, elle est particulièrement impliquée dans la soustraction : ainsi différentes études montrent une activation plus importante de la PHSI pour la soustraction que pour la comparaison [Chochon et al., 1999], ou la multiplication [Chochon et al., 1999, Lee, 2000]. Pour ce qui est de l'addition, on relève des activations plus intenses dans une version approximative de la tâche, par rapport à une tâche exacte [Dehaene et al., 1999], mais ce résultat n'a pas toujours été répliqué depuis [Molko et al., 2003, Venkatraman et al., 2005]. Parallèlement, Piazza et al [Piazza et al., 2002a] ont montré que la PHSI n'est pas seulement activée par des tâches symboliques, mais aussi dans une tâche d'estimation de numérosité sur des nuages de points, comparée à une tâche perceptive sur l'apparence physique des nuages.

Chacun des résultats précédents nous renseigne peu sur la nature des traitements que cette aire cérébrale effectue sur les stimuli numériques. Cependant dans cette accumulation de résultats, la PHSI semble d'autant plus s'activer que la tâche implique une manipulation de quantités (soustraction, addition approximative, estimation de numérosité) : les données neuropsychologiques montrent en effet que les soustractions semblent ne pouvoir être résolues que si le patient a accès à un système de traitement des quantités numériques. Quant aux additions approximatives, elles sont implémentées dans un code indépendant de la langue [Spelke and Tsivkin, 2001], très vraisemblablement un code de la quantité, puisqu'on retrouve chez certains patients un effet de distance pour l'addition de chiffres.

Enfin, toujours en accord avec notre hypothèse selon laquelle la PHSI est impliquée dans la manipulation de quantités, l'activation de cette aire par les différentes opérations arithmétiques est modulée par la taille des nombres traités [Stanescu-Cosson et al., 2000, Kiefer and Dehaene, 1997].

6.2.2 Activation de la PHSI dans la comparaison

Effet de distance

La PHSI est particulièrement activée par la comparaison numérique. Ce résultat de Chochon [Chochon et al., 1999] a été maintes fois répliqué depuis [Pesenti et al., 2000, Pinel et al., 2001, Clec'H et al., 2000, Thioux et al., 2005]. Or, la tâche de comparaison offre l'occasion d'observer plus en détail les paramètres auxquels cette activation est sensible. En effet, sur le plan comportemental, les effets de la notation, de la distance, et du côté auxquel sont attribuées les réponses "plus grand" et "plus petit", sont additifs sur les temps de réaction. Encodage, calcul de la réponse, et exécution motrice seraient donc trois processus cérébraux séparés dans le temps et/ou dans l'espace. En utilisant les potentiels évoqués, Dehaene [Dehaene, 1996] retrouve trois effets séparés dans le temps, et dont les lieux diffèrent sur le scalp. En particulier, la topologie associée à l'effet de distance correspondrait à une activation bilatérale dans le lobe pariétal. La même expé-

rience a été menée en IRMf par Pinel et ses collègues [Pinel et al., 2001] : ceux-ci trouvent une activation de la PHSI, sensible à l'effet de distance. En effet, cette région est d'autant plus activée que les nombres sont proches. On interprètera ce dernier résultat comme la trace d'un recrutement plus important dans cette aire, du fait de la plus grande difficulté de séparer deux nombres proches. Cependant, cette étude en elle-même souffre de la confusion entre les temps de réponse et la distance entre les nombres : conformément à l'effet de distance classique, les temps de réponse sont plus longs dans la condition où les nombres sont proches. L'activation de la PHSI dans cette dernière condition pourrait alors n'être que la trace d'un recrutement plus important des ressources attentionnelles dans ce cas, ou encore il pourrait s'agir d'un centre de prise de décision. A ce sujet, une expérience décrite ci-dessous [Pinel et al., 2004] apportera des lumières salutaires.

Indépendance du format d'entrée

Les deux études sur la comparaison décrites ci-dessus reportent que seule la distance numérique a un effet sur l'activation de la PHSI. En particulier, le niveau d'activation reste le même que les stimuli soient présentés en chiffres arabes ou sous la forme de mots écrits. Par ailleurs, on retrouve le sillon intrapariétal dans plusieurs études dans lesquelles les stimuli ont été présentés sous d'autres formes : nombres parlés [Clec'H et al., 2000], nuages de points [Piazza et al., 2002a, Venkatraman et al., 2005], séquences sonores [Piazza et al., 2002b].

6.2.3 Preuves directes du lien entre la quantité et le sillon intrapariétal

Effet d'amorçage subliminal

Il semble que la lecture des chiffres arabes évoque automatiquement la quantité associée [Dehaene and Akhavein, 1995, Duncan and McFarland, 1980]. Même lorsque les chiffres sont présentés très brièvement, de manière subliminale, les sujets parviennent à accéder à la quantité; dans ces conditions, Dehaene et Naccache ont montré que la PHSI était activée par ce stimulus subliminal [Dehaene et al., 1998, Naccache and Dehaene, 2001. Dans cette expérience, les sujets doivent classifier des nombres (les "cibles") selon qu'ils sont plus grands ou plus petits que 5. Les cibles sont toutes parfaitement visibles. A l'insu des sujets, d'autres stimuli numériques (chiffres arabes ou mots écrits) sont présentés de manière subliminale (les "amorces") juste avant chaque cible. Les temps de réponse sont plus rapides lorsque les deux nombres sont associés à la même réponse (soit deux nombres plus petits que 5 ou deux nombres plus grands que 5), et ceci quelle que soit la notation utilisée pour les cibles et les amorces. Parallèlement, les données d'IRMf révèlent que les PHSI bilatérales sont sensibles à la répétition du même nombre, même lorsque celui-ci a été présenté sous deux formes différentes : le niveau d'activation est plus faible lorsque l'amorce et la cible sont numériquement identiques que lorsqu'elles sont différentes. Pour qualifier ce phénomène, on dit que la région de la PHSI s'habitue aux stimuli numériques [Grill-Spector and Malach, 2001]. Les images ne sont certainement pas assez précises pour observer un effet de distance, aussi on ne peut pas conclure directement de cette expérience que c'est la quantité qui est codée par la PHSI. On peut cependant dire que cette région différencie les nombres, et les code dans un format abstrait, puisqu'elle s'habitue même si l'amorce et la cible ne sont pas présentées sous la même forme.

Activation en l'absence de tâche numérique

Dans toutes les études précédentes, le sujet doit exécuter une tâche portant sur les attributs numériques des stimuli. Aussi, et bien que l'accumulation des données, dans des paradigmes différents utilisant des tâches contrôles variées, puisse argumenter contre des explications non-numériques, il est toujours possible d'expliquer les résultats en invoquant des mécanismes généraux, liés à l'attention, à la planification, à l'exécution des tâches. Pour cette raison, il était devenu urgent de trouver un paradigme exempt de ces confusions.

S'affranchissant de toute tâche numérique, Eger et ses collègues [Eger et al., 2003] mesurent l'activité cérébrale dans une tâche de détection de cible : par exemple, réagir à chaque présentation du nombre "2" parmi une suite de nombres présentés successivement sur l'écran. Les auteurs varient le format de présentation des nombres, qui peuvent être des chiffres arabes ou des nombres parlés présentés auditivement. Les sujets réalisent cette même tâche sur des nombres, des lettres (présentés visuellement à l'écran, ou désignées par leur nom dans un stimulus auditif) et des couleurs (rectangle coloré à l'écran ou nom de couleur présenté auditivement). Les trois tâches sont de la même difficulté et impliquent de manière équivalente les ressources attentionnelles et exécutives du sujet. Au niveau comportemental, on observe un effet de distance pour les nombres, les lettres et les couleurs, suggérant que les sujets ont eu accès à une représentation sémantique dans tous les cas. En comparant les activations pour les nombres à celles pour les lettres et les couleurs, les auteurs obtiennent systématiquement - et exclusivement - deux régions symétriques de la PHSI, dont les coordonnées coïncident quasiment avec celles des études antérieures. La courbe d'activation dans ces deux régions est par ailleurs indépendante de la modalité de présentation des stimuli. Ces résultats montrent donc la présence dans les deux hémisphères, au niveau de la PHSI, d'aires cérébrales qui codent pour les nombres de manière abstraite (indépendamment du format d'entrée), possiblement un code sémantique qui engendrerait un effet de distance.

Une autre étude réalisée au laboratoire par Manuela Piazza et quelques collègues, et à laquelle j'ai moi-même eu la chance de participer, tire parti de cette idée de s'affranchir des tâches numériques pour rechercher les régions responsables de l'encodage de la numérosité des stimuli non-symboliques. Comme celle sur les stimuli subliminaux, cette étude est fondée sur le principe de l'habituation neuronale. Selon ce principe, un neurone qui reçoit plusieurs fois de suite la même information décharge de moins en moins fort au fur et à mesure que l'information est répétée. En répétant plusieurs fois de suite le même stimulus, on habitue donc sélectivement les neurones qui codent pour ce stimulus, et si plusieurs neurones de ce type se trouvent concentrés en un endroit du cortex, la réponse hémodynamique en cet endroit sera diminuée, par rapport à une situation où on présenterait plusieurs stimuli différents. Suivant cette méthodologie (il s'agit du paradigme d'habituation classique), Piazza et al présentent successivement plusieurs nuages de points de même numérosité (par exemple, 16), mais dont les autres propriétés varient drastiquement. Ainsi, les neurones sensibles aux paramètres non-numériques des stimuli, comme la taille des points par exemple, ne s'habituent pas en réponse à ces stimuli; par contre la réponse des neurones codant pour la numérosité 16 diminue fortement. Au milieu de la séquence d'habituation, des stimuli spéciaux, dits stimuli de test, sont insérés.

Ces stimuli peuvent différer des premiers par leur numérosité, ou par la forme des points. Les sujets doivent simplement regarder la séquence de stimulation en y prêtant le plus d'attention possible. Dans ce contexte, les régions bilatérales de la PHSI répondent beaucoup moins quand on présente la numérosité d'habituation (16) que pour d'autres numérosités. Cette région abrite donc des neurones codant pour la numérosité. Les coordonnées observées rejoignent celles de Eger et al : la même région coderait donc pour une représentation abstraite de quantité, évoquée à la fois pour les stimuli symboliques (auditifs et visuels) et les stimuli non-symboliques (visuels). En sus, la présente étude montre que ces régions encodent la numérosité de manière approximative seulement : quand la numérosité du stimulus test est relativement proche de la numérosité d'habituation, la réponse hémodynamique reste pratiquement au même niveau que pendant l'habituation. Les activations montrent donc un effet de distance, révélateur de la précision du code sous-jacent.

Cet effet de distance reflète-t-il le caractère sémantique de la représentation de numérosité dans le sillon intrapariétal? C'est possible, et c'est l'interprétation avancée par les auteurs. Mais il serait possible de soutenir que cette représentation n'est pas du tout sémantique. Pour attribuer un caractère sémantique à une représentation, il faut que celle-ci représente les distances sémantiques entre les stimuli. Dans le domaine des nombres, cela suppose que la population neuronale soit activée de façon quasi-équivalente pour deux stimuli représentant des numérosités voisines, et que les taux de décharge diffèrent d'autant plus que la distance numérique entre les stimuli augmente. Si cet effet de distance dans les activations neuronales reflète l'encodage de la distance sémantique, on devrait le retrouver de manière équivalente quel que soit le format de présentation des stimuli (symbolique ou non-symbolique), car dans tous les cas, les relations sémantiques entre les stimuli restent les mêmes. Au contraire, si on s'intéresse exclusivement aux stimuli non-symboliques, il est possible que cet effet de distance au niveau des activations émerge de manière fortuite. En effet, le mécanisme extrayant la numérosité d'un stimulus non symbolique est imprécis, dès lors qu'il n'est pas possible de compter les éléments. A chaque fois que ce mécanisme commet une erreur au niveau de la numérosité extraite, ce seraient les neurones codant pour cette autre numérosité qui répondraient, créant ainsi un effet de distance dans les activations (car les erreurs commises au niveau de l'extraction de la numérosité donneraient le plus souvent une réponse assez proche de la réponse correcte). Dans ce cas on ne devrait pas retrouver cet effet de distance au niveau des stimuli symboliques, car alors l'extraction de la numérosité peut être fait de manière précise.

6.2.4 Latéralité des activations

Les deux études précédentes, qui sont aussi les plus pures du point de la tâche et les plus faciles à interpréter, reportent des activations bilatérales dans le sillon intrapariétal. C'est le cas également de la plupart des études d'imagerie, bien que certaines reportent un avantage pour l'hémisphère droit, en particulier dans la tâche de comparaison [Dehaene, 1996], ou dans les tâches non-symboliques [Piazza et al., 2002b]. Cependant dans son étude d'habituation aux nuages de points, Piazza note que l'hémisphère gauche semble plus précis que l'hémisphère droit [Piazza et al., 2004]. Que signifient ces activations bilatérales? Les deux régions sont-elles indispensables à l'encodage des quantités numériques? Travaillent-elles en coopération, ou chacune est-elle indépendante?

Les données récoltées auprès de patients souffrant de déconnexions calleuses indiquent que les deux hémisphères sont capables de résoudre indépendamment une tâche de comparaison [Gazzaniga and Hillyard, 1971, Gazzaniga and Smylie, 1984, Seymour et al., 1994, Cohen and Dehaene, 1996. En effet, quand un chiffre est présenté brièvement dans l'un ou l'autre des hémichamps visuels, l'hémisphère ipsilatéral n'a aucun accès à ce stimulus : en l'absence de corps calleux, la perception et le traitement des stimuli est exclusivement réalisée par l'hémisphère contralatéral. Lorsque les chiffres sont présentés dans l'hémichamp droit, le patient se comporte tout à fait normalement : l'hémisphère gauche en isolation parvient à résoudre seul les tâches numériques. Par contre, lorsqu'un chiffre est présenté à l'hémisphère droit, le patient éprouve des difficultés à le lire, et ses productions sont souvent proches de la vérité sans être exactes. En même temps, le patient reste capable d'effectuer des comparaisons sur ce chiffre. Il se comporte donc exactement comme ceux que nous avons appelés les "patients approximatifs". Pour traduire ces données, il a été proposé que l'hémisphère droit est doté d'un système d'encodage de la quantité, système approximatif à l'image des données d'IRMf qui ont été enregistrées dans la PHSI [Piazza et al., 2004]. En conclusion, il apparaît alors que les deux hémisphères sont capables de représenter la quantité associée aux nombres, mais l'hémisphère gauche serait plus à même de régir le comportement, comme il abrite d'autres aires cérébrales capables de gérer les nombres exacts. La question de savoir si dans tous les cas l'hémisphère droit contribue à la sélection de la réponse correcte reste à élucider.

Cependant, les données neuropsychologiques ne semblent pas totalement soutenir cette dernière conclusion. Les postulations précédentes prédisent que la manipulation des quantités serait assez résistante aux lésions cérébrales, puisqu'il faudrait que les lésions touchent les sillons intrapariétaux de manière bilatérale. Il est effectivement assez rare de trouver des patients souffrant d'un déficit du traitement de la quantité, puisqu'à ce jour, seulement quatre cas ont été reportés. Les lésions de ces 4 patients sont en fait unilatérales. Le premier, dont les déficits sont massifs dès lors qu'il essaie de traiter des nombres plus grands que 4 [Cipolotti et al., 1991], y compris si les stimuli sont présentés de manière non-symboliques, souffre d'une lésion sur une aire fronto-pariétale à gauche. Le deuxième souffre d'une lésion unilatérale de la région pariétale inférieure à droite [Dehaene and Cohen, 1997] (notons que chez ce patient il est hautement probable que toute l'organisation des hémisphères droit et gauche ait été bouleversée, celui-ci était très fortement gaucher). Le troisième patient [Delazer and Benke, 1997] présente lui aussi un lésion unilatérale, du cortex pariétal gauche cette fois. Enfin, le dernier de ces patients [Lemer et al., 2003] souffre d'une lésion extrêmement focale du lobe pariétal à gauche, au niveau du sillon intrapariétal. En examinant ces quatre patients, il semble que seul l'hémisphère dominant soit indispensable pour résoudre des tâches quantitatives sur les nombres; cependant il faut nuancer cette dernière remarque en gardant à l'esprit que d'autres patients avec des lésions unilatérales, parfois englobant une large partie de l'hémisphère gauche, restent capables d'effectuer les mêmes tâches où ceux-là échouent [Dehaene and Cohen, 1991, van Harskamp et al., 2002]. Peut-être les patients du premier groupe souffrent-ils de lésions dont l'impact est plus large, en ce que des régions d'apparence saines auraient perdu toute fonctionnalité. Ce phénomène peut effectivement être observé sous l'effet de la déconnection des régions saines d'avec la région lésée, ou par effet de diaschisis (influence de la lésion

à distance; par exemple, cet effet peut se traduite par un hypométabolisme dans une région apparemment saine).

En conclusion, il reste donc difficile de comprendre le rôle respectif des deux hémisphères à ce jour.

6.2.5 Spécificité de la PHSI pour les nombres?

Si dans PHSI, on trouve une région qui encode les quantités lorsqu'on présente des stimuli numériques, sert-elle une représentation du nombre spécifiquement, ou s'agit-il d'un code plus général, qui serait utilisé pour représenter la quantité dans des contextes et sous des formes divers [Walsh, 2003]? Pourrait-il s'agir d'une représentation de nature spatiale, servant de support à l'encodage des numérosités, comme peuvent le suggérer les intéractions entre nombres et espace [Zorzi et al., 2002, Dehaene et al., 1993]? On voit qu'il sera difficile de répondre à cette question, car il est impossible de tester exhaustivement tous les stimuli à caractère quantitatif. Dans un effort dans cette direction, Simon et al [Simon et al., 2002] ont réalisé une cartographie fonctionnelle du lobe pariétal, en enregistrant les activations dans 6 tâches différentes : soustraction de chiffres arabes, détection de phonème, saccades occulaires, orientation attentionnelle, pointage vers une cible, tâche motrice simulant la saisie d'un objet de forme complexe. On trouve une région cérébrale qui ne s'active que pour la soustraction parmi cet ensemble de tâches, et celle-ci se situe dans la profondeur du sillon intrapariétal. Ces données suggèrent que les activations pariétales pour les nombres ne reflètent pas seulement un codage spatial des informations numériques.

Une série d'études se sont penchées sur la question de la spécificité de la représentation de quantité présente dans le lobe pariétal : s'agit-il purement d'une représentation de la quantité numérique ou d'une représentation de quantité pouvant s'appliquer à différents continuum?

Pour le savoir, différents protocoles étudient les activations cérébrales dans des tâches de comparaison, impliquant des stimuli variés. Par exemple, Thioux et al [Thioux et al., 2002, Thioux et al., 2005] demandent à leurs sujets de comparer des chiffres, puis de comparer des animaux sur le plan de la férocité (par exemple : "qui est le plus féroce? le loup ou le pigeon?"). Ils reportent une activation des sillons intrapariétaux, exclusivement dans le cas des stimuli numériques. Fias et al [Fias et al., 2003], au contraire, identifient une région dans le sillon intrapariétal gauche qui est activée à la fois dans des comparaisons de nombres, de longueurs, et d'angles. De même Kaufmann et al [Kaufmann et al., 2005] ne reportent aucune différence au niveau des sillons intrapariétaux entre l'effet de distance numérique et l'effet de distance pour la comparaison de la taille physique des stimuli. Fullbright et al [Fulbright et al., 2003] reportent des activations communes dans le sillon intrapariétal pendant que les sujets ordonnent des chiffres, des lettres, selon l'ordre naturel ou de l'alphabet, ou selon leur taille physique. Cependant, tandis que les régions activées se recouvrent, les loci des effets de distance sont légèrement décalés les uns par rapport aux autres. Cohen-Kadosh et al [Cohen-Kadosh et al., 2005] ont présenté un résultat encore plus fort, avec une région du sillon intrapariétal sujette à un effet de distance plus fort pour la comparaison numérique que pour la comparaison de taille physique ou de luminosité.

Dans ce contexte aux résultats partagés, Pinel et al [Pinel et al., 2004] ont développé un protocole propre

à étudier les effets d'interférence entre les différentes comparaisons. Ils présentent à leurs sujets deux chiffres arabes, dont la taille et la luminosité peuvent varier. Dans différents blocs, les sujets effectuent une comparaison selon l'un ou l'autre de ces attributs. Les temps de réaction sont soumis à un effet de distance dans les trois cas; par ailleurs, la comparaison numérique interfère avec la comparaison de la taille, mais pas avec la luminance. Pour étudier l'interférence entre deux dimensions, les paires de stimuli sont classées en deux catégories "congruents" et "incongruents", où les stimuli sont dits "congruents" si les deux dimensions étudiées (par exemple, la quantité numérique et la taille) conduisent à choisir la même réponse. Dans la tâche de comparaison numérique, les temps de réaction sont ralentis lorsque les stimuli sont incongruents pour la dimension de la taille, par contre la congruence entre nombre et luminance n'a aucun effet sur les temps de réaction. Réciproquement, la quantité numérique interfère avec la tâche de jugement de taille, mais pas avec les jugements de luminosité. Au niveau des activations, les résultats suivent cette même logique. Pinel et al obtiennent comme leurs prédécesseurs des activations pour leurs trois tâches de comparaison qui se superposent au niveau des sillons intrapariétaux bilatéraux. En analysant les effets de distance, ils reconnaissent l'effet de distance classique pour la comparaison numérique au niveau de la PHSI; au même endroit ils trouvent également un effet de distance pour la comparaison de taille. Enfin, en accord avec ce dernier résultat, l'analyse des interférences au niveau des activations montre que la quantité numérique et la taille interfèrent précisément sur les PHSI bilatérales. Pinel et al interprètent ce résultat en postulant que la quantité numérique et la taille physique sont codées par des populations neurales distribuées sur la PHSI; ces populations se recouvrent partiellement en ce que certains neurones pourront coder à la fois pour la quantité numérique et la taille. En accord avec les résultats précédents, Kaufmann et al [Kaufmann et al., 2005], qui utilisent un paradigme expérimental très proche, trouvent des interférences entre la taille physique et la taille numérique dans les sillons intrapariétaux bilatéraux. Le code auquel ces neurones participent pourrait être un code général de quantité, ce qui expliquerait également les interactions entre nombres et espace [Hubbard et al., 2005] (voir chapitre 3).

A la question de la spécifité de la représentation des nombres dans la PHSI, les études sur les effets d'interférence apportent donc une réponse nuancée : une partie des neurones encodant la quantité numérique participeraient également à l'encodage de la longueur. Cependant, les tâches de comparaison ne recrutent pas systématiquement cette région : ainsi par exemple aucune activation n'a été enregistrée pour comparer des niveaux de luminance dans l'étude de Pinel et al.

Dans un article récent, Shuman et Kanwisher [Shuman and Kanwisher, 2004] étudient directement la question de la spécificité de la région encodant la quantité numérique. Sur les mêmes stimuli, les sujets effectuent tantôt une tâche numérique, tantôt des tâches orthogonales; aucune aire cérébrale ne répond spécifiquement pour les tâches numériques dans ce contexte. Ces derniers résultats peuvent sembler en contradiction avec ceux de Piazza et al [Piazza et al., 2004], d'autant plus que les deux articles ont été publiés en opposition. Toutefois, les résultats de Piazza ne sont pas pertinents dans notre débat sur la spécificité des représentations numériques : dans leur étude d'habituation à la numérosité montre seulement que certaines régions cérébrales (situées dans les PHSI et bilatérales) encodent la numérosité, à l'exclusion

de tout autre attribut physique non-numérique des stimuli. Ces résultats n'excluent pas que la même aire (dans le sens où deux populations pourraient partager le même territoire cérébral) ou les mêmes neurones (dans le sens où deux populations pourraient avoir un certain nombre de cellules en commun) participent à l'encodage d'autres informations non-numériques. Il se peut par exemple que des cellules participent à la fois à l'encodage de la quantité numérique et d'autres propriétés physiques du stimulus, soit que ces cellules représentent un attribut plus général que la numérosité; ou qu'il s'agisse de cellules jouant un rôle computationnel technique utile dans les deux cas - des cellules inhibitrices par exemple. Plus simplement, les mêmes neurones peuvent être doublement recrutés pour des raisons d'ordre pratique, liées par exemple à la connectique, sans qu'il faille attribuer un sens cognitif à ces doubles emplois.

6.2.6 Comparaison avec les données des animaux

Nous avons vu plus haut que les animaux sont capables de discriminer des stimuli sur la base de la numérosité, et même d'effectuer des manipulations basiques sur ces numérosités (comparaison, additions, soustractions). Plusieurs équipes s'intéressent aux bases cérébrales de ces capacités, en particulier Nieder et Miller [Nieder et al., 2002, Nieder and Miller, 2003]. Ceux-ci enregistrent des neurones préfrontaux et pariétaux pendant que le singe est engagé dans une tâche de détection de changement sur des numérosités. Dans ces deux régions cérébrales, ils observent des neurones sensibles à la numérosité du stimulus, avec une numérosité préférée, et sujets à un effet de distance (voir paragraphe 2.1). Les propriétés numériques des cellules préfrontales et pariétales sont hautement similaires, sauf que les cellules pariétales commencent à décharger avant les cellules préfrontales. Les données sont compatibles avec un encodage de la numérosité au niveau du pariétal, soutenu ensuite par des cellules du cortex préfrontal lors de la mémorisation de l'information en mémoire de travail.

Dehaene et al [Dehaene et al., 2004] présentent une comparaison de la localisation des aires pariétales activées chez l'humain avec les régions enregistrées par Nieder et al (voir figure 6.2). Voyant la correspondance entre les localisations, ils qualifient ces régions d'"homologues plausibles". Aux informations anatomiques sur ces régions viennent s'ajouter leurs propriétés fonctionnelles : dans les deux cas, un codage par unités accordées sur une numérosité préférée, avec un effet de distance de type Weberien. La région du HIPS, identifiée chez l'Homme à l'aide de l'imagerie cérérale, serait donc héritée d'une région du sillon intrapariétal chez le singe; chez ces deux espèces, les régions en question encodent la numérosité. Chez l'Homme, la région participe à la résolution de tâches symboliques, très certainement pour manipuler les propriétés quantitatifs des nombres. Il faut donc que cette région implémente des mécanismes qui calculent la correspondance entre les stimuli symboliques et leur traduction en terme de quantités.

6.3 Autres aires cérébrales impliquées dans le traitement des nombres

Bien que la région pariétale, qui faisait l'objet du paragraphe précédent, semble le lieu de convergence de toutes les tâches impliquant des quantités numériques, celle-ci n'est en général pas activée isolément. Elle

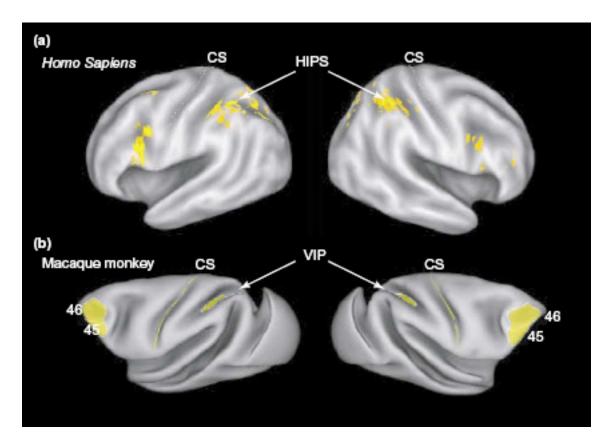


FIG. 6.2 – Les deux régions où l'on a observé des neurones sensibles à la numérosité chez le singe macaque sont le cortex préfrontal et le fond du sillon intrapariétal (colorées en jaune dans l'image du bas). La localisation de ces régions rappelle celle des régions impliquées dans la manipulation des quantités chez l'homme (colorées en jaune dans l'image du haut). Dans la zone intrapariétale, l'homologie entre le macaque et l'homme est frappante : cette région pourrait avoir été largement conservée au cours de l'évolution. Dans le cortex préfrontal, en revanche, une déformation serait nécessaire pour faire coïncider les régions, ce qui suggère un degré plus important de réorganisation au cours de l'évolution. Reproduit depuis [Dehaene et al., 2004].

s'intègre dans un large réseau, à l'image de celui qu'ont découvert les premières études d'imagerie, impliquant des aires frontales, préfrontales, pariétales, et inférotemporales. Au sein de ce réseau, certaines régions ont retenu notre attention, parce que nous avons pu trouver dans la littérature des hypothèses plausibles sur leur rôle fonctionnel.

6.3.1 Les régions inférotemporales gauche et droite

Les régions occipito-inféro-temporales, à gauche, sont cruciales pour lire des mots. En particulier, une "aire de la forme visuelle des mots" (FVM) a été identifiée dans le gyrus fusiforme : cette aire extrait une représentation des mots invariante par rapport à l'aspect physique des stimuli (fonte, casse, taille des lettres...). Naturellement, l'aire de la FVM, est impliquée dans la lecture des nombres écrits en toutes lettres. Lorsque les mots sont présentés en chiffres arabes, par contre, l'homologue droit de la FVM est activé lui aussi. Ainsi le potentiel évoqué à 100 ms poststimulus culmine sur la partie postérieure gauche du crâne dans le cas d'un nombre en toutes lettres; dans le cas des chiffres arabes la topologie est symétrique [Dehaene, 1996]. En IRM fonctionnelle, le gyrus fusiforme droit est plus activé pour des chiffres que pour des nombres en toutes lettres, tandis qu'aucune différence n'est reportée pour la comparaison inverse [Pinel et al., 2001].

Pour lire des chiffres, les deux gyri fusiformes droit et gauche sont donc actifs. C'est pourquoi les patients souffrant de déconnexion calleuse sont capables de lire des chiffres arabes dans leurs deux hémisphères. De même, on trouve des patients alexiques chez qui les chiffres arabes sont sélectivement préservés. Souvent ces deux types de patients ont un comportement approximatif face à des chiffres arabes [Cohen and Dehaene, 2000, McNeil and Warrington, 1994], parce que l'information extraite au niveau du gyrus fusiforme droit ne parvient pas à accéder au système de calcul exact dans l'hémisphère gauche. Leur lecture des chiffres arabes peut être détériorée alors que la comparaison numérique reste toujours intacte.

6.3.2 Le gyrus angulaire gauche

Alors que la PHSI est le lieu pressenti d'une représentation sémantique des quantités numériques, le gyrus angulaire semble activé quand on utilise les symboles verbaux des nombres. Nous donnons ici une liste d'arguments qui convergent dans ce sens.

Données d'imagerie cérébrale

Le gyrus angulaire est une circonvolution se recourbant autour de l'extrémité postérieure du sillon temporal supérieur gauche, au niveau du lobule pariétal inférieur (voir figure 6.1). De nombreuses observations indiquent que le gyrus angulaire gauche est activé dans la multiplication. Ce résultat a été observé en employant des tâches contrôles variées : comparaison [Chochon et al., 1999], soustraction [Lee, 2000], manipulation de lettres [Gruber et al., 2001, Fulbright et al., 2000]. Curieusement, à l'inverse de ce cortège de résultats positifs, l'étude de Zago et al [Zago et al., 2001] ne réplique pas l'activation du gyrus angulaire dans la multiplication : celui-ci apparaît déactivé dans la multiplication par rapport à la condition de repos

dans leur étude. Pourrait-on y voir un manque de précision de leur méthode d'imagerie? Ils utilisent en effet la méthode assez ancienne de Tomographie par Emission de Positons, alors que toutes les autres études utilisaient l'Imagerie par Résonnance Magnétique.

L'activation du gyrus angulaire a été enregistrée pour un certain nombre de tâches liées au langage, ou à la de mémoire de travail [Fiez and Petersen, 1998, Zago and Tzourio-Mazoyer, 2002] (voir à ce sujet le chapitre 9). Dans la cartographie de Simon et al [Simon et al., 2002], le gyrus angulaire gauche est la seule région qui soit activée communément par la soustraction numérique et la tâche phonologique de détection de phonème, alors qu'aucune des tâches visuo-spatiales testées ne recrute cette région. Le gyrus angulaire gauche ferait donc partie d'un réseau impliqué dans le traitement du langage, et serait recruté pour résoudre certaines tâches numériques. Au vu de ses propriétés fonctionnelles, l'activation du gyrus angulaire dans la tâche de multiplication serait cohérente avec l'hypothèse selon laquelle la multiplication serait résolue en utilisant des automatismes verbaux.

Dans le domaine des nombres, Delazer et al ont relié l'activation du gyrus angulaire à l'utilisation d'automatismes verbaux. Ils ont en effé montré que l'apprentissage de faits arithmétiques nouveaux s'accompagne d'un transfert des activations de la PHSI vers le gyrus angulaire [Delazer et al., 2003]. De plus l'activation du gyrus angulaire est modulée par la façon dont ces faits arithmétiques ont été appris. Dans une deuxième étude [Delazer et al., 2004], Delazer et al entraînent des sujets à répondre à des problèmes d'arithmétique, en utilisant deux types d'entraînement : dans une première conditions les faits sont appris par coeur, comme des automatismes verbaux, dans une deuxième condition, on explique aux sujets comment décomposer les opérations. Les images d'IRM fonctionnelle révèlent une activation du gyrus angulaire pour tous les problèmes qui ont été appris, et cette activation est encore renforcée pour les problèmes qui ont été appris de façon automatique. Le gyrus angulaire participerait donc à la récupération d'informations encodées verbalement en mémoire à long terme. Ces résultats suggèrent par ailleurs que les sujets avaient tendance à apprendre par coeur les résultats de tous les problèmes, quel que soit le type d'entraînement dont ils ont bénéficié.

Par ailleurs, l'activation du gyrus angulaire est modulée par la nature exacte de la tâche. Ainsi, Dehaene et al [Dehaene et al., 1999] reportent une activation plus importante de cette région dans la tâche d'addition exacte par rapport à l'addition approximative. Or, la tâche d'addition exacte présente par rapport à son analogue approximative la particularité de reposer sur des mécanismes dépendant du language. En effet, nous avons vu au paragraphe 2.3 que des bilingues entraînés dans une seule langue à résoudre des problèmes exacts et approximatifs, présentent un coût de changement de langue à résoudre les mêmes problèmes exacts dans leur deuxième langue (celle sur laquelle ils n'ont pas été entraînés) [Spelke and Tsivkin, 2001]. Les problèmes approximatifs, au contraire, sont résolus exactement de la même façon quelque soit la langue de présentation. Dans la tâche d'addition exacte, pour laquelle le gyrus angulaire est activé, les sujets choisissent donc spontanément de traiter les stimuli dans un format verbal.

Enfin, les résultats précédents nous aident à comprendre les données de Stanescu-Cosson et al [Stanescu-Cosson et al., 2000], selon lesquelles le gyrus angulaire est plus activé pour les additions dont le résultat est inférieur à 10, que lorsque le résultat est plus grand. En effet, les additions impliquant des petits nombres

sont en général résolues par automatismes verbaux, en recherchant le résultat dans la mémoire à long terme. Lorsque les nombres sont plus grands, les sujets élaborent plus souvent des stratégies utilisant la valeur quantitative des nombres, par exemple un problème pourra être décomposé en faisant regroupant les dizaines (9+6=10+6-1), si l'un des deux opérandes est proche de 10 [Dehaene and Cohen, 1995, LeFevre et al., 1996].

En résumé, on enregistre une activation du gyrus angulaire dans un certain nombre de tâches numériques, où intervient le code verbal, symbolique des nombres. L'enregistrement d'une activation du gyrus angulaire pour la multiplication suggère que cette opération est effectuée en encodant les nombres sous un format verbal. Nous reviendrons sur cette idée plus loin dans le texte (voir chapitre 9).

Données de stimulation

La meilleure démonstration de la dissociation entre les substrats neuronaux de la multiplication et de la soustraction a été observée grâce à la méthode de stimulation, qui consiste à invalider temporairement une zone ponctuelle du cortex en envoyant des signaux électriques. De telle expériences ne sont pratiquées que lorsque des électrodes ont dû être implantées pour raisons médicales (chez les patients épileptiques en attente d'une intervention chirurgicale par exemple) ou à l'occasion d'une opération au niveau du cerveau, où elles viennent aider le chirurgien à repérer les zones cruciales à ne pas abîmer. Ainsi Whalen et al [Whalen et al., 1997] ont eu accès à un patient avec des électrodes implantées au niveau des lobes pariétal, temporal, et frontal postérieur de l'hémisphère gauche. Parmi tous les sites de stimulation testés, un seul détériore les performances du patient spécifiquement pour la multiplication, tout en laissant intacte la capacité de faire des additions. Ce site est situé à proximité du gyrus angulaire gauche.

Il existe un deuxième cas de stimulation intracorticale, qui présente une double dissociation entre un site où les multiplications sont détériorées et les soustractions intactes, et un autre site où les effets sont contraires [Duffau et al., 2002]. Cette fois-ci, le patient était stimulé au cours d'une intervention chirurgicale sur un gliome dans la région pariéto-occipitale gauche. Avant la résection, le chirurgien stimule les zones situées à proximité de la tumeur et repère les aires cruciales pour le patient. Les auteurs identifient un premier site de stimulation, au niveau du gyrus angulaire gauche, qui détériore sélectivement la multiplication (et pas la soustraction). A proximité, au niveau du sillon intrapariétal, un autre site de stimulation présente les effets contraires : les performances en soustraction chutent tandis que la multiplication reste intacte. On observe ici encore la double dissociation entre soustraction et multiplication. De plus la localisation de ces deux sites s'accorde extrêmement bien avec l'ensemble des données d'imagerie résumées dans le paragraphe précédent.

Données de neuropsychologie

Les études d'imagerie suggèrent que le gyrus angulaire est impliqué dans la résolution de la multiplication. En neuropsychologie, un certain nombre de patients présentent des déficits spécifiques pour la multiplication, alors que l'addition et la soustraction sont préservées. Les sites lésionels de ces patients sont en fait extrêmement variés, et ne se recoupent pas, bien qu'ils se trouvent majoritairement dans l'hémisphère gauche : noyaux sous-corticaux et insula gauches [Dehaene and Cohen, 1997], cortex inféro-temporal

gauche [Cohen and Dehaene, 2000], hippocampes bilatéraux et cortex pariétal inférieur [Van Harskamp and Cipolotti, 2001], lobe temporal gauche [Jefferies et al., 2005], jonction pariéto-temporale gauche [Lee, 2000], atrophie fronto-temporale de l'hémisphère gauche [Lemer et al., 2003]. Nous sommes surpris de relever qu'aucun de ces patients ne présente de lésion au niveau du gyrus angulaire. En revanche, si l'on se tourne vers les patients présentant un lésion du gyrus angulaire, force est de constater qu'aucun d'entre eux ne présente de problème particulier pour les multiplications [van Harskamp et al., 2002]: 1 patient, [Varley et al., 2005]: 3 patients. Les trois patients de Varley et al, dont les lésions s'étendent bien au-delà du gyrus angulaire, présentent des problèmes pour comprendre ou produire des nombres sous forme phonologique (nombres énoncés oralement) ou orthographique (nombres écrits en toutes lettres), à intégrer dans des déficits plus généraux pour le langage parlé et écrit. Quant au patient de Van Harskamp, Rudge et Cipolotti, sa lésion ne touche qu'une partie du gyrus angulaire, expliquant peut-être que ses déficits soient restreints; celui-ci a des problèmes exclusivement pour les soustractions. Tous ces résultats sont surprenants si l'on songe aux données de stimulation chez l'humain, qui montrent très nettement que le gyrus angulaire est impliqué de manière cruciale dans les multiplications. Ces résultats suggèrent que les patients que nous avons considérés ci-dessus ont pu mettre en place des stratégies compensatoires, utilisant d'autres aires cérébrales, pour remédier à leur troubles et accéder aux résultats des multiplications. Comme il est peu probable que ceux-ci aient pu réapprendre complètement les tables de multiplications, nous pouvons penser que celles-ci ne sont pas stockées au niveau du gyrus angulaire même, peut-être au niveau de l'hippocampe [Van Harskamp and Cipolotti, 2001, et que le gyrus angulaire jouerait un rôle plutôt dans l'accès à ces informations.

6.3.3 Le lobule pariétal postérieur supérieur, au carrefour entre nombres et espace

Une troisième région, qui se situe au niveau du lobule pariétal postérieur supérieur (LPPS) de façon bilatérale, est activée dans de nombreuses tâches numériques (voir figure 6.1). Dans l'étude de Simon et al cependant, ces régions ne sont pas significativement activées par la tâche de soustraction [Simon et al., 2002], mais par contre elles répondent à toutes les tâches visuospatiales (saccades occulaires, mouvements attentionnels, pointage, geste de saisie d'un objet). Conformément à ces données, le LPPS est connue pour son implication dans des tâches attentionnelles, sans rapport aucun avec les nombres [Corbetta et al., 2000]. Parmi les tâches numériques testées, le LPPS est activé dans la comparaison [Pinel et al., 2001, Pesenti et al., 2000], dans l'addition approximative [Dehaene et al., 1999], dans la soustraction à deux chiffres [Lee, 2000]. On le retrouve également dans le comptage [Piazza et al., 2003], probablement à cause des mouvements attentionnels que suppose cette tâche. De manière générale, il semble donc que cette aire soit activée dans des tâches requiérant la manipulation de quantités; elle se révèle même sensible à la distance numérique entre les stimuli pour la comparaison [Pinel et al., 2001].

Inspirés par la convergence entre tâches numériques et tâches spatiales, Dehaene et al [Dehaene et al., 2003] ont proposé que cette aire soit le lieu des interférences entre nombres et espace [Hubbard et al., 2005] (voir chapitre 3). Elle serait recrutée lorsque la tâche implique de sélectionner un nombre parmi plusieurs; cette selection se ferait alors par des mécanismes isomorphes à la sélection d'une position dans l'espace. L'idée

précise l'image de la ligne numérique mentale : les mécanismes attentionnels implémentés dans le LPPS décoderaient la représentation analogue de la quantité en termes spatiaux, créant les effets d'interférence spatiale dans nos tâches numériques.

6.3.4 Cortex précentral et prise de décision

Enfin on retrouve souvent dans les tâches numériques une région activée au niveau du gyrus précentral gauche [Chochon et al., 1999, Pesenti et al., 2000, Pinel et al., 2001, Pinel et al., 2004]. Dans la comparaison, cette région présente un effet de distance : plus les nombres sont éloignés, plus cette aire est activée. En regard à la localisation anatomique de ces activations, proches du cortex moteur, Pesenti et al ont proposé que l'activation de cette aire est liée à l'utilisation des doigts dans l'apprentissage précoce de l'arithmétique. Quelques années plus tard, Pinel et al [Pinel et al., 2004] montrent qu'on trouve un effet de distance dans cette même région cérébrale pour des comparaisons sur d'autres continuums (taille physique, luminance). L'hypothèse de Pesenti apparaît assez improbable. Pinel et al proposent alors que cette aire abrite un processus assez général de prise de décision et de sélection de la réponse correcte.

6.4 Etude des dyscalculies développementales

Nous avons reporté un réseau de preuves expérimentales identifiant un système non-verbal de représentation de la quantité numérique. Présent très tôt dans le développement, ce système non-verbal pourrait être le noyau sur la base duquel l'ensemble des compétences arithmétiques se développent. Une atteinte précoce au niveau de la représentation des quantités pourrait donc avoir des répercutions sur l'apprentissage de l'arithmétique. On observe chez certains enfants des troubles spécifiques de l'apprentissage de l'arithmétique : ces troubles peuvent être observés en l'absence de difficultés de language et associés à un QI normal. Peut-on trouver des signes d'un déficit de la quantité numérique chez ces enfants? Comme nous avons vu que l'architecture du système numérique normal est composite, existe-t-il plusieurs sortes de dyscalculies, selon que le déficit touche spécifiquement l'un ou l'autre des composants : la représentation sémantique des quantités numériques, le système verbal de manipulation des symboles numériques, ou les convergences entre représentations numériques et spatiales?

6.4.1 différents types de dyscalculies?

Quelques propositions pour classifier les dyscalculies en sous-types ont été avancées; mais sans aller jusqu'au niveau de finesse des distinctions que nous voudrions chercher à observer. On pourra cependant citer quelques travaux identifiant des dyscalculies de type verbal. Par exemple, Temple [Temple, 1991] décrit le cas d'un patient souffrant de dyslexie développementale, de type phonologique. Ce patient présente conjointement une dyscalculie, mais seulement pour la multiplication : additions et soustractions sont résolues sans problème. De manière générale, la dyscalculie et la dyslexie sont souvent associées. Le profil des déficit pour les dyscalculiques-dyslexiques est souvent moins tranché que dans le cas précédent. Cependant, Geary, Hamson et Hoard [Geary et al., 2000] ont remarqué une différence intéressante entre les dyscalculiques dyslexiques et les dyscalculiques non dyslexiques : dans une tâche d'addition, les enfants avec une dyslexie associée comptent souvent sur leurs doigts pour retrouver le résultat, alors que les enfants sans dyslexie n'utilisent pas cette stratégie. Ces derniers ont plutôt tendance à chercher à retrouver leurs tables d'addition de mémoire. Nous expliquerons ainsi ces résultats : lorsque l'enfant présente une dyslexie associée, il est gêné pour représenter les nombres sous forme verbale, et par conséquent évite de chercher dans sa mémoire un résultat qu'il a du mal à retenir. Par contre, les enfants sans dyslexie n'ont pas de problème au niveau de la mémorisation des tables de multiplication. Il se peut alors que leur déficit ait une source différente : par exemple, un problème pour représenter la quantité numérique. Dans ce cas-là, les stratégies de comptage sur les doigts n'ont aucun sens pour eux et leur semblent beaucoup moins naturelles à manipuler. Chez l'enfant en général, l'utilisation des doigts en arithmétique semble être une étape importante dans le développement de la cognition numérique : ainsi Fayol, Barrouillet et Marinthe [Fayol et al., 1998] ont montré, sur un échantillon de 200 enfants normaux, que le niveau de maîtrise des doigts que présentent ces enfants à 5 ans est un meilleur prédicteur de leurs performances en arithmétique à 8 ans, que leur niveau d'intelligence générale (pourtant mesuré à 8 ans).

De manière générale, il reste donc beaucoup de travail à faire avant de pouvoir proposer une classification des dyscalculies. Les observations sus-citées sont néanmoins encourageantes, et nous prédisons que nous retrouverons les mêmes dissociations dans la dyscalculie que chez les patients cérébro-lésés.

Bases neurales de la dyscalculie

Les bases neurales identifiées pour différents patients dyscalculiques se recoupent au niveau du lobe pariétal, mais leur localisation exacte fluctue entre les études. Par exemple, Levy, Reis et Grafman [Levy et al., 1999 ont étudié le cas d'un patient présentant une dyscalculie développementale, sans aucun autre trouble neurologique. A l'aide de techniques de spectroscopie, les auteurs ont identifié une anormalité dans le métabolisme de la région pariétale inférieure gauche. Après ce premier résultat sont parues deux études qui se recoupent au niveau du sillon intrapariétal (partie horizontales). Isaacs et al [Isaacs et al., 2001] comparent deux groupes d'adolescents, anciens prématurés, regroupés selon qu'ils présentent des difficultés en mathématiques ou non. Au niveau de leur anatomie cérébrale, les auteurs identifient une seule différence : un déficit de quantité de matière grise chez les adolescents dyscalculiques au niveau du sillon intrapariétal gauche. On retrouve des résultats similaires (mais symétriques) dans l'étude de Molko et al [Molko et al., 2003] sur le syndrome de Turner. Il s'agit d'une maladie congénitale, où les patientes ne possèdent qu'un seul chromosome X. Ces patientes présentent pour la plupart des troubles du calcul, bien que leur QI verbal soit très bon. Molko et al observent une désorganisation dans le sillon intrapariétal droit, qui est d'une profondeur anormale chez ces patientes par rapport à des contrôles. De plus, dans des tâches d'additions de petits et de grands nombres, les patientes atteintes du syndrome de Turner activent cette région de la même façon pour les petits et les grands nombres, alors que chez des sujets contrôles, l'activation est plus forte pour les grands nombres. De la même façon, dans deux autres maladies génétiques associées à des troubles de dyscalculie on

trouve une hypoactivation en IRMf pour un réseau d'aires fronto-pariétales dans des tâches de calcul (fragile X [Rivera et al., 2002], syndrome velocardiofacial [Eliez et al., 2001]).

RÉSUMÉ - Corrélats cérébraux de la cognition numérique

Les capacités numériques reposent sur des aires cérébrales distribuées, dont, pour certaines d'entre elles, il est aujourd'hui possible d'interpréter la fonction.

Nous avons en particulier identifié une petite région, située dans la partie horizontale du sillon intrapariétal, qui semble liée à la manipulation de quantités numériques. Cette région est particulièrement activée pour les soutractions et les comparaisons, deux tâches qui sont normalement résolues en utilisant des représentations de quantités. En particulier, la partie horizontale du sillon pariétal est le lieu de l'effet de distance, signature de la manipulation des nombres en termes quantitatifs. Elle se comporte par contre de manière complètement indépendante du format d'entrée des stimuli, et s'active aussi bien pour des stimuli symboliques que non-symboliques. L'activation de cette région est automatique et ne nécessite pas l'exécution d'une tâche numérique. Cette aire semble jouer un rôle particulier dans les dyscalculies développementales, des troubles cognitifs ayant à deux reprises été associés à une anomalie du sillon intrapariétal.

La région intrapariétale qui nous intéresse semble être l'homologue d'une partie du sillon intrapariétal du singe, avec laquelle elle partage les mêmes propriétés fonctionnelles sur les numérosités. Cependant, à l'heure actuelle, nous ne savons pas s'il s'agit d'une aire spécifique au traitement des nombres; il semble du moins qu'une partie des neurones impliqués dans la représentation des quantités numériques prennent également part à l'encodage d'autres propriétés des stimuli, comme les longueurs par exemple.

Tout un réseau d'aires travaillent de concert avec cette aire intrapariétale, à laquelle nous avons attribué le noyau des compétences numériques. Ainsi, les gyri fusiformes bilatéraux identifient les stimuli écrits en chiffres arabes; des réseaux fronto-pariéto orchestrent la mise en oeuvre de stratégies. En particulier, nous reconnaissons dans les activations cérébrales des aires qui reprennent les deux grandes caractéristiques des propriétés fonctionnelles des nombres : le gyrus angulaire gauche serait le lieu où la forme verbale des nombres est manipulée, et les lobules pariétaux postérieurs implémenteraient un mécanisme attentionnel applicable à la fois aux nombres et à l'espace.

Chapitre 7

Un autre système non-verbal pour les petits nombres?

Les chapitres précédents, en exposant les recherches sur les bébés et les animaux, contournent volontairement un débat actuel et brûlant. La polémique porte sur les petits nombres : sont-ils codés de la même façon que les autres, c'est-à-dire en utilisant une représentation analogique et approximative de la quantité ?

7.1 Des résultats surprenants

Les résultats les plus frappants sont ceux de Xu [Xu, 2003]. On se souvient de sa démonstration que les bébés de 6 mois sont capables de distinguer des nuages de 8 points et de 16 points. En utilisant le même protocole, Xu montre dans le même article que les bébés distinguent 4 points de 8, mais confondent des nuages de 2 points et de 4 points. Or, selon la loi de Weber, ces deux conditions devraient être discriminées de la même façon puisque les numérosités considérées forment un même rapport (1/2). Si on veut être pointilleux et prendre en compte les observations selon lesquelles la fraction de Weber diminue lorsque les numérosités augmentent, 2 et 4 devraient au contraire être plus facilement distingués que 4 et 8.

Les résultats précédents ne sont pas isolés. Plusieurs paradigmes ont été testés, à différents âges, et tous convergent vers le même type d'observations surprenantes. Par exemple, Feigenson, Carey et Hauser [Feigenson et al., 2002a] cachent des biscuits dans deux boîtes devant des enfants de 10 et 12 mois. Les biscuits sont cachés un par un, puis l'expérimentateur se retire et les enfants sont alors libres de se déplacer vers les boîtes. Lorsque les boîtes contiennent respectivement 1 et 2 biscuits, presque tous les enfants choisissent de se diriger vers la boîte contenant le plus de biscuits. Par contre, lorsque ces boîtes contiennent 3 et 4, ou même 3 et 6 biscuits, ils semblent choisir aléatoirement. De même, lorsqu'on leur donne le choix entre 1 et 4 biscuits, ils ne montrent pas de préférence entre les deux [Feigenson and Carey, 2005]. Des enfants plus âgés de quelques mois montrent le même type de réponse dans une tâche de recherche d'objets cachés [Feigenson and Carey, 2003] : si 4 objets ont été cachés dans une boîte devant eux, les enfants ne montrent pas plus d'empressement à continuer à chercher après avoir trouvé deux objets, que si seulement 2 objets

ont été cachés. Chez les animaux, les petits singes (singes rhesus en semi-liberté) montrent le même type de comportement spontané que les enfants [Hauser et al., 2000]. Par contre, chez les chimpanzés, on ne retrouve pas d'effet de taille de ce genre, même lorsque ces animaux ne sont pas entraînés, et que la présentation des essais est particulièrement longue [Beran and Beran, 2004].

7.2 La théorie des pointeurs attentionnels

Comment expliquer ces résultats contradictoires avec notre théorie des représentations numériques analogues? Invariablement, les bébés, les jeunes enfants, et les petits singes échouent dès que l'un des deux nombres dépasse 3 (dans le cas des enfants) ou 4 (dans le cas des singes). Pour rendre compte de cet effet de la taille des nombres, Leslie et al [Leslie et al., 1998], ainsi que Simon [Simon, 1999] se sont inspirés de la théorie des pointeurs attentionnels ("object files" en anglais) dont Kahneman et Treisman puis Trick et Pylyshyn ont proposé deux versions. Selon ces théories, on repère chaque objet perçu par un pointeur, et ces pointeurs permettent de suivre les objets dans leurs déplacements, de lier plusieurs percepts d'un même objet répartis dans le temps et dans l'espace. Le nombre de pointeurs disponibles simultanément serait limité à 4, du moins chez l'adulte, ce qui permet d'expliquer pourquoi il est impossible de suivre simultanément plus de 4 objets parmi un groupe d'objets en mouvement.

Plusieurs résultats suggèrent que les bébés possèdent une physique naïve qui prend en compte la permanence des objets, même lorsque ceux-ci sont temporellement cachés. Les bébés suivent les objets présents, y compris ceux qui sont cachés, et adaptent leurs attentes lorsque de nouveaux objets sont ajoutés ou que certains sont retirés. Ils se montrent même capables d'inférer des informations numériques à partir des propriétés physiques des trajectoires. Ainsi, lorsqu'on leur montre deux objets qui apparaissent successivement, ils n'ont pas les mêmes attentes selon que les deux objets sortent de derrière le même écran ou de deux écrans physiquement séparés : dans le deuxième cas ils savent qu'il y a deux objets, tandis que dans le premier cas ils n'attendent qu'un seul objet [Spelke et al., 1995].

Simon, puis Leslie et ses collègues ont donc postulé que, lorsque peu d'objets sont présents, les bébés utilisent un système de pointeurs conformes à la théorie des pointeurs mentaux. A partir de ces pointeurs, il est possible d'inférer la numérosité des ensembles d'objets; par exemple deux ensembles peuvent être comparés en opérant une correspondance terme à terme au niveau des pointeurs. Cependant, le système des pointeurs, s'il permet des manipulations sur les numérosités, n'a pas pour vocation de représenter la numérosité. Il s'agit d'une propriété de bord du système.

Doit-on pour autant supposer que les bébés ne peuvent pas former une représentation analogique, du type de celle décrite plus haut, face à un ensemble peu numéreux? A l'heure actuelle, il n'existe aucune donnée répondant à cette question. Selon Feigenson, Carey et Spelke [Feigenson et al., 2002b], ces représentations sont calculées, mais le bébé ne peut pas y accéder parce que le système de pointeurs est trop saillant. Aussi, lorsque des objets sont ajoutés un à un, plusieurs pointeurs sont successivement engagés pour suivre ces objets. Après que 3 ou 4 objets ont été successivement ajoutés, il ne reste plus de pointeur disponible, et si

on ajoute encore un objet, le bébé surchargé se désengage et, comme il a perdu tout accès à la numérosité des objets déjà cachés, ne parvient pas du tout à représenter la numérosité de l'ensemble. La confusion est si totale, qu'il ne peut même plus dire s'il y a un ou plusieurs objets : c'est pourquoi il choisit au hasard entre 1 et 4 biscuits.

Soulignons tout de même que cette restriction n'est valable que pour les expériences utilisant des objets séparables. Nous avons vu par exemple que les bébés sont capables de distinguer 2 versus 3 sauts de poupée [Wynn, 1996]. Dans ce cas de figure, le système de pointeurs ne peut jouer aucun rôle, n'étant pas applicable aux actions. Citons encore une autre expérience particulièrement ingénieuse, dans laquelle Wynn, Bloom et Chiang [Wynn et al., 2002] montrent des films aux bébés mettant en scène plusieurs ensembles de points. Pendant la phase d'habituation, 2 (respectivement 4) collections de 3 points évoluent indépendamment sur l'écran, puis les bébés sont testés avec deux types de stimuli : 2 collections de 4 points ou 4 collections de 2 points. Dans les deux cas, les stimuli tests possèdent le même nombre de points, et par conséquent aucun paramètre ne permet de les distinguer, si ce n'est le nombre de collections. Les bébés parviennent cependant à discriminer les deux types de stimuli. Ils ne seraient donc pas empêchés de traiter la numérosité, dès lors que les items à dénombrer ne sont pas assimilés à des objets. Ce dernier résultat appuie la théorie des pointeurs, dans la mesure où les bébés échouent sur les tâches numériques seulement dans le cas où les pointeurs peuvent être utilisés.

7.3 Addition et soustraction de petits nombres

7.3.1 Études chez le bébé

A la lumière de la discussion précédente, nous pouvons introduire les célèbres expériences de Wynn [Wynn, 1992a]. Des bébés de 5 mois sont assis face à une scène, sur laquelle l'expérimentateur manipule des figurines, toutes identiques. Dans une condition d'addition que nous noterons par la suite "1+1=1 versus 2", au début de l'essai, l'expérimentateur place une figurine sur la scène, puis déploie un écran qui masque ce qui se passe sur la scène. A ce moment-là, l'expérimentateur introduit une deuxième figurine sur la scène, en prenant bien garde que le bébé fasse attention à cet événement. L'écran est alors ôté, révélant selon les conditions 1 ou 2 figurines. De la même façon, on peut présenter des soustraction : 2 figurines sont présentes sur la scène, l'écran se place devant elle, l'expérimentateur retire l'une des deux figures, puis relève l'écran pour réveler soit 1 ou 2 figurines (condition "2-1=1 versus 2"). Dans les deux cas, Wynn enregistre un temps de regard supérieur lorsque la fin de l'essai présente une incongruité numérique. Et c'est bien le nombre exact d'objets attendus qui guide le comportement, et non une distinction plus grossière, de type un seul versus plusieurs : en effet les bébés réussissent à distinguer les essais "1+1=2 versus 3".

Ces résultats ont inspiré tout une littérature, dans laquelle ils sont souvent répliqués, malgré des variations expérimentales parfois importantes. Trois théories différentes ont été avancées pour expliquer ce comportement.

Dans son papier originel, Wynn invoque une représentation abstraite des numérosités pour expliquer ses

résultats. Selon elle, les bébés ont représenté chaque quantité, et réalisé des opérations mentalement sur ces quantités. En somme, c'est exactement cette hypothèse que nous avons reprise pour expliquer les additions approximatives sur les grands nombres [McCrink and Wynn, 2004].

Mais Leslie et ses collègues [Leslie et al., 1998] ainsi que Simon [Simon et al., 1995, Simon, 1997] avancent une hypothèse plus simple que celle de Wynn, en accord avec leur théorie sur les pointeurs attentionnels. Selon eux les bébés ont utilisé ce système de pointeurs pour suivre les objets initialement présents sur la scène, en engageant un pointeur supplémentaire lorsqu'un nouvel objet était ajouté à ceux-ci. Ainsi, ils se comportent de telle façon qu'ils se montrent sensible à la numérosité, mais sans que la numérosité elle-même soit directement représentée.

Enfin, plus récemment, Cohen et Marks [Cohen and Marks, 2002] ont interprété les données de Wynn comme résultant d'un processus de bas niveau : la préférence pour les stimuli présentés récemment. Selon eux, les bébés regardent plus longtemps le résultat "1" dans la condition "1+1=2 versus 1", non pas parce qu'ils sont surpris, mais parce que, ayant vu 1 figurine sur la scène au tout début de l'essai, ils sont attirés par la condition où une seule figurine se trouve sur la scène. De même, leur théorie prédit qu'ils préfèrent regarder 2 figurines dans la condition "2-1=1 versus 2". Pour illustrer leur hypothèse, Cohen et Marks présentent une expérience calquée sur le paradigme de Wynn, et où les résultats possibles montrés aux bébés sont 0, 1, 2 ou 3 figurines. Dans ce cas, ils retrouvent les résultats de Wynn en restreignant leurs analyses aux résultats 1 et 2. Mais, crucialement, les bébés n'ont pas tendance à regarder plus longtemps vers les résultats 0 et 3. pourtant incongrus du point de vue numérique. Ce qui émerge des temps de fixation, c'est que les bébés regardent plus longtemps "1" dans le cas de l'addition ("1+1"), et ils regardent plus longtemps "2" dans le cas de la soustraction ("2-1"). C'est précisément les résultats qui sont prédits par la théorie de Cohen et Marks. Cependant quelques considérations méthodologiques nous empêchent de retenir définitivement cette interprétation : en effet dans leur expérience, Cohen et Marks multiplient les conditions expérimentales et les essais de familiarisation, au point que les bébés ont pu être lassés avant même que les essais ne commencent. Par ailleurs les essais numériquement cohérent sont très rares (25%) dans leur paradigme, banalisant de ce fait les incongruences numériques. Tous ces choix ont pu contribuer à détourner les bébés du comportement qu'ils affichent traditionnellement.

Les partisans des deux premières théories ont redoublé d'effort et d'inventivité; ils ont testé plusieurs variantes autour de ce même paradigme (objets en mouvements [Koechlin et al., 1998], changement subreptif de l'identité des objets [Simon et al., 1995], accumulation de transformations successives [Uller et al., 1999]) sans qu'aucun n'ait pu apporter de réponse définitive. Le comportement des enfants n'est pas affecté lorsque la localisation exacte des objets, ou leur identité est modifiée au cours de l'essai, ce qui est évident si on adopte la théorie de Wynn, selon laquelle la tâche implique une représentation abstraite de la numérosité. Dans le cadre de la théorie des pointeurs, on l'interprétera en concluant que, d'une part, les informations sur l'identité de l'objet ne sont pas considérées lorsque celui-ci est associé à un pointeur; les pointeurs sont indexés par les informations de localisation. D'autre part ces informations de localisation peuvent être floues : par exemple, dans le cas de l'expérience de Koechlin, Dehaene et Mehler où les objets sont en mouvement,

la localisation attribuée aux objets ne serait pas ponctuelle mais analogue à une distribution uniforme sur l'ensemble de la scène. Enfin, nous avons cité l'expérience de Uller et al, qui montre que lorsqu'on multiplie les transformations les bébés ne sont plus capables de prédire le résultat de toutes ces transformations. Uller et ses collègues interprètent leurs résultats dans le cadre de la théorie des pointeurs, en expliquant que chaque mise à jour introduit un coût en terme de précision. Mais le même argument peut être appliqué à la théorie de la représentation abstraite.

En somme, dans l'état actuel des connaissances, il n'est pas possible de trancher entre ces trois théories. Cependant, au vu des résultats exposés juste au-dessus, qui plaident en faveur de la théorie des pointeurs dans le domaine des petits nombres, et dans un souci de cohérence malgré la disparité des tâches étudiées, la théorie des pointeurs nous semble la plus plausible.

7.3.2 Études chez les animaux

L'équipe de Hauser a repris les tâches de Wynn d'addition de petits nombres pour les faire passer à des singes non entraînés. Soumis aux tests de base "1+1=2 versus 1", "2-1=1 versus 2", les singes, comme les bébés, réagissent lorsque le résultat n'est pas numériquement cohérent [Uller et al., 2001]. Par contre, contrairement aux bébés, Hauser a réussi à montrer que les singes étaient capables de prendre en compte le type d'objet présenté [Sulkowski and Hauser, 2001]. La tâche en question rappelle à la fois l'expérience de Wynn et celle des biscuits : devant un singe, l'expérimentateur manipule des objets sur deux scènes. Après avoir montré la situation initiale, deux écrans sont posés et le singe ne perçoit pas les ensembles d'objets sur les deux scènes, mais continue d'observer les manipulations d'ajout et de retrait d'objets de l'expérimentateur. Les objets manipulés sont soit des aubergines (de la nourriture) soit des morceaux de métal. L'ensemble des expériences montrent que les singes sont capables de trouver l'emplacement où il y a le plus de nourriture, même lorsque des objets ont été ajoutés ou retirés par rapport à la situation de départ, et sont particulièrement attentifs au type d'objet impliqués dans les diverses transformations. Notons toutefois à quel point les deux types d'objets présentent un attrait écologique différent (les uns se mangent, les autres non), ce qui n'était pas le cas lorsqu'on a testé la sensibilité des bébés à l'identité des objets (deux figurines différentes) [Simon et al., 1995].

Enfin, dans une dernière expérience, Hauser et Carey [Hauser and Carey, 2003] ont montré que les singes sont sensibles comme les bébés au nombre de transformations successives effectuées derrière l'écran. Ainsi, ils sont capables de résoudre "2+1=3 versus 2" et "2+1=3 versus 4", mais échouent lorsque les trois objets sont ajoutés un par un ("1+1+1=3 versus 2 ou 4").

7.4 Traces d'un système séparé pour les petits nombres chez l'adulte

Depuis près d'un siècle, la communauté scientifique s'est intéressée au temps nécessaire pour compter des ensembles d'objets. Ainsi, en 1908, Bourdon [Bourdon, 1908] parvient à mettre au point un équipement technique sophistiqué pour mesurer son propre temps de réponse à des nuages de points. Il observe une loi

fondamentale, que l'on continue à répliquer encore aujourd'hui : pour 1 à 3 points, le temps de réponse est pratiquement constant, de l'ordre de 600 ms, puis à partir de 4, le temps de réponse augmente linéairement avec la numérosité, avec une pente de l'ordre de 200 ms par unité (voir figure 7.1). Le phénomène de stagnation du temps de réponse entre 1 et 3 points a été nommé "subitisation" [Kaufman et al., 1949], en ce qu'il suggère que nos 3 points sont appréhendés simultanément, sans coût supplémentaire par rapport aux ensembles de 1 ou 2 points.

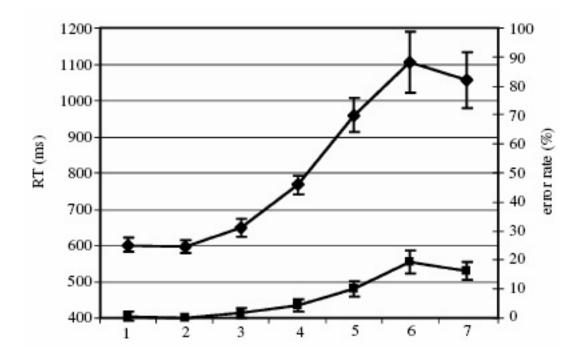


FIG. 7.1 – Temps de réaction moyens et taux d'erreurs pour quantifier des ensembles présentés brièvement. Losanges : RTs ; carrés : taux d'erreurs. Reproduit depuis [Piazza et al., 2003].

Longtemps, ce phénomène de subitisation a été présenté comme une preuve que les petits nombres sont appréhendés avec un mécanisme séparé. Mais il se peut que la subitisation ne soit que le reflet du caractère approximatif de nos représentations analogiques. En effet, nous avons vu que la perception de la numérosité est soumise à la loi de Weber, or si l'on calcule le rapport entre les nombres 1, 2, 3 et leurs voisins respectifs, on obtient des quotients bien éloignés de 1.0 : au pire 3/4 pour 3 et son voisin 4. Notre système analogique, bien qu'approximatif en général, est donc capable d'identifier avec précision les petits nombres de 1 à 3, ce qui expliquerait pourquoi le temps nécessaire à les nommer est très court. Par contre, pour les nombres au-delà de 4, l'estimation que fournit notre système analogique est trop peu fiable, aussi nous préférons utiliser le comptage. Cette explication hautement probable remet en cause la subitisation comme trace d'un système spécifique au petits nombres chez l'adulte.

Il existe quelques cas de patients intéressants. Dehaene et Cohen [Dehaene and Cohen, 1994] décrivent ainsi deux patients simultanagnosiques. La simultanagnosie est un trouble de l'attention sérielle, où les patients sont dans l'incapacité de modifier le focus de leur attention. Par exemple, lorsqu'on leur demande de décrire une scène visuelle, ils n'en retiennent que des fragments, passant à côté d'éléments importants. Dehaene et Cohen ont confronté leurs deux patientes à une tâche de comptage de points : toutes deux

montrent des comportements différents mais échouent invariablement quand il y a plus de 4 points. Par contre, pour 1, 2 voire 3 points, leur performance approche la perfection. Ces derniers résultats suggèrent qu'un mécanisme spécial, indépendant de l'attention, permet de dénombrer de 1 à 3 points.

On peut citer aussi le patient de Cipolotti, Butterworth et Denes [Cipolotti et al., 1991], qui, en l'absence de tout autre déficit sémantique, est incapable de réaliser toute tâche impliquant des nombres au-delà de 4, quel que soit le format dans lequel ces nombres sont présentés. Bien plus que les deux patientes précédentes, ce cas suggère qu'il existe un mécanisme spécial permettant de manipuler les petites quantités; ce mécanisme serait spécifiquement préservé chez ce patient, alors que les voies de traitement normales ne fonctionnent plus. On peut supposer que ce patient ait les mêmes performances que les bébés devant des petits ensembles d'objets. Le patient exploiterait son système de pointeurs, qui ne lui avait peut-être plus servi pour les mathématiques depuis son enfance, pour résoudre quelques tâches.

En résumé, on ne trouve pas de preuve non ambiguë de l'existence d'un système particulier pour les petits nombres chez l'adulte. Si les enfants traitent effectivement les petits nombres de manière différente, il se passe peut-être un moment au cours du développement où ils apprennent à unifier les voies de traitement pour tous les stimuli.

RÉSUMÉ - Le cas des petits nombres

Chez les jeunes enfants et chez les animaux, certaines tâches ne suivent pas la loi de Weber, qui a été présentée ci-dessus comme la signature du système de représentation analogique des quantités. Au contraire, dans ces tâches, les performances sont liées au nombre total d'objets; dès lors que celui-ci dépasse 3 (ou 4), les sujets échouent systématiquement. La théorie des pointeurs mentaux rend compte de ces résultats. Selon cette théorie, les sujets attribuent un pointeur mental à chaque objet perçu, et suivent les déplacements de ces objets au cours du temps. Ce système n'a pas vocation à représenter la numérosité des ensembles mais encode des informations numériques de manière sous-jacente, via le nombre de pointeurs engagés. Par conséquent, on peut facilement imaginer des stratégies qui permettent de résoudre un certain nombre de tâches dites "numériques" sur la base de ce système.

A cette théorie, il est nécessaire d'adjoindre deux hypothèses supplémentaires afin de rendre compte de l'intégralité des données. Tout d'abord, lorsque l'on dépasse le nombre de pointeurs disponibles, toute information numérique est perdue; vraisemblablement l'intégralité des pointeurs sont désengagés. A elle seule, cette première hypothèse ne permet pas de prédire l'échec pour comparer 1 biscuit par rapport à 4 biscuits présentés un par un. Il faut donc poser une deuxième hypothèse, parmi les deux alternatives suivantes :

- Hypothèse 2a : L'accès aux représentations analogiques de numérosité est compromis par l'engagement des pointeurs sur les objets : les objets sont individualisés ce qui bloque l'accès à la représentation de l'ensemble. Contrairement à l'adulte, les bébés ne seraient pas capables de représenter à la fois les objets dans un ensemble, et l'ensemble lui-même. Ainsi, quand on lui présente 4 objets successivement, au moment où le dernier des 4 apparaît, le bébé désengage ses pointeurs n'en ayant plus aucun de libre, mais ne peut plus pour autant utiliser sa représentation analogique de quantité. Cette hypothèse est par exemple soutenue par Feigenson [Feigenson et al., 2002b].
- Hypothèse 2b : En même temps que le bébé engage ses pointeurs vers les objets qui apparaissent successivement, il construit une représentation analogique du nombre d'objets présents, sous forme d'une magnitude interne. Mais, si les objets sont présentés successivement, chaque présentation oblige à réactualiser la valeur de cette magnitude, et cette dernière opération présente un coût tel, qu'au bout de quelques additions successives il n'est plus possible de continuer. Par conséquent, lorsqu'on arrive au quatrième objet et que les pointeurs sont désengagés, le bébé a également perdu sa représentation analogique. Par contre, ce deuxième scénario prédit que le bébé n'aura aucun mal à comparer les quantités 1 et 4 si les quatre objets sont présentés simultanément. Notons également que notre hypothèse 2b est en désaccord avec le modèle historique de l'accumulateur, selon lequel les représentations analogiques sont construites en additionnant successivement les éléments un à un, sauf si l'on suppose que l'accumulateur ne peut pas fonctionner en-dessous d'une certaine fréquence d'apparition des stimuli.

Chapitre 8

Réponse cérébrale à la numérosité chez le bébé

8.1 Introduction

De nombreuses espèces animales possèdent des compétences en arithmétique (voir paragraphe 2.1). La capacité de discriminer des stimuli sur leur propriétés numériques est largement partagée [Beran and Beran, 2004, McComb et al., 1994, Kilian et al., 2003, Davis and Perusse, 1988]; les rats se sont montrés capables de reproduire la numérosité d'un ensemble [Platt and Johnson, 1971]; et on observe même que certaines espèces (pigeons, singes) savent effectuer des opérations élémentaires (comparaisons, additions, soustractions) [Brannon et al., 2001, Flombaum et al., 2005, Sulkowski and Hauser, 2000]. Tous ces résultats laissent penser qu'il existe un sens des nombres, faculté universelle de représenter la numérosité des ensembles, qui serait une acquisition assez ancienne de l'évolution. Dans la cognition humaine, on retrouve des traces de ce sens des nombres, certains effets rappelant ceux que l'on trouve chez les animaux [Cordes et al., 2001b, Barth et al., 2003], voir aussi chapitre 5.1. Devant le caractère universel de cette faculté, il apparaît vraisemblable que les bébés soient dotés d'un sens des nombres dès les premiers mois de vie.

Dès 6 mois, les bébés discriminent des grandes numérosités dès lors que celles-ci sont suffisamment distantes [Xu and Spelke, 2000, Xu and Arriaga, 2003]. Les premières expériences ont été menées avec des stimuli visuels, mais il s'est avéré par la suite que cette capacité s'étend également à la modalité auditive, où on retrouve, à âge équivalent, des performances équivalentes [Lipton and Spelke, 2003]. Des études plus anciennes suggèrent par ailleurs que les bébés sont capables de reconnaître que des stimuli visuels et auditifs sont de numérosité égale ([Starkey et al., 1983, Starkey et al., 1990], mais voir aussi [Moore et al., 1987, Mix et al., 1997]). Ainsi, à l'âge de 6 mois, il semble exister des représentations numériques d'un haut degré d'abstraction, commune aux stimuli auditifs, où par définition les éléments de l'ensemble à quantifier apparaissent séquentiellement, et aux stimuli visuels, même lorsque tous les éléments sont présentés simultanément. S'agit-il d'une faculté présente dès la naissance, ou du résultat d'un apprentissage? Pour aborder

cette question, il apparait important aujourd'hui d'étudier la présence de telles représentations numériques chez les nourrissons encore plus jeunes.

D'autre part, si les résultats dans le domaine des grandes numérosités sont clairs et éloquents, pour les petites numérosités les bébés semblent être plus sensibles aux propriétés physiques des stimuli qu'à leur numérosité [Feigenson et al., 2004, Feigenson, 2005]. Alors que dans le domaine des grands nombres, la capacité des bébés à distinguer deux numérosités dépend du ratio qu'elles forment entre elles, ils ne réagissent pas à la différence entre deux petites numérosités séparées par un ratio élevé [Xu, 2003]. Est-ce à dire que les bébés ne peuvent pas représenter les petites numérosités sous la même forme que les autres? Ou, selon l'avis de Feigenson et al, que certaines propriétés non-numériques des scènes peu numéreuses leur apparaissent plus saillantes que la numérosité, bloquant l'accès aux représentations numériques? Cette question semble difficile à résoudre en n'utilisant que des méthodes comportementales. Grâce à l'enregistrement des potentiels cérébraux, nous pourrons avoir accès aux processus de traitement de la numérosité, même si ceux-ci n'aboutissent pas à une réponse comportementale de l'enfant.

En utilisant un paradigme d'habituation (voir [Piazza et al., 2004], où le protocole expérimental est basé sur la même logique; [Dehaene-Lambertz and Dehaene, 1994, Grill-Spector and Malach, 2001]), nous avons recherché les corrélats cérébraux du traitement de la numérosité chez des bébés âgés de 3 mois. Afin d'aborder la question de la continuité entre petites et grandes numérosités, nos tests impliquent à la fois des grands nombres (4, 8 et 12) et des petits nombres (2 et 3). Tous les stimuli sont présentés dans la modalité visuelle. De plus, nous comparons ces nouveaux résultats à d'autres qui ont été obtenus dans le laboratoire avec des stimuli présentés dans la modalité auditive. Ces analyses nous renseignent sur le degré d'abstraction des représentations de numérosité impliquées.

8.2 Méthodes expérimentales

8.2.1 Stimuli

Nous avons enregistré l'activité cérébrale pendant que les bébés visionnaient une suite de stimuli représentant des ensembles de personnages colorés sur un fond noir. Insérés dans une suite d'images de numérosité identique et utilisant le même personnage, une partie des stimuli différaient de la grande majorité des autres par leur numérosité, et/ou par l'identité des personnages dessinés (voir figure 8.1 A).

Chaque ensemble était présenté pendant 1500 ms. Nous avions deux sortes de stimuli, que nous appellerons stimuli d'habituation, et stimuli test. A l'intérieur d'un bloc donné, tous les stimuli d'habituation avaient la même numérosité, et mettaient en scène le même personnage. Les stimuli test, au contraire, pouvaient éventuellement différer des stimuli d'habituation par leur numérosité et/ou par l'identité du personnage, créant ainsi quatre types de stimuli tests (voir figure 8.1 A).

Contrôle des paramètres non-numériques L'emplacement des personnages, les paramètres physiques de l'image (paramètres intensifs : taille des personnages, écart moyen entre deux personnages; paramètre

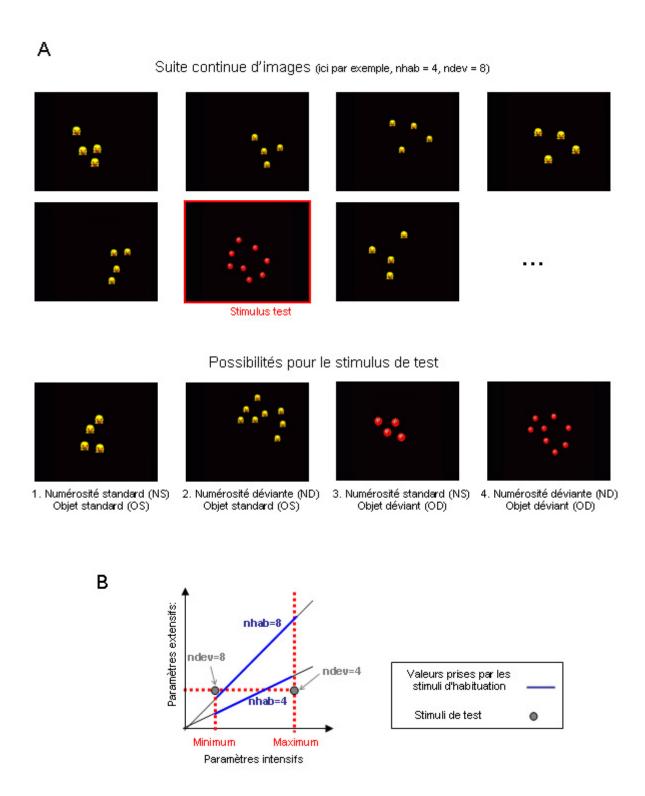


Fig. 8.1 – Protocole expérimental. A. Une suite continue d'images est présentée au bébé. Chaque image reste présente sur l'écran pendant 1500ms. La plupart des images contiennent le même nombre de personnages. Les personnages restent toujours le même tout au long de chaque bloc (canard, chien, poule, ...), mais de temps en temps, nous insérons une image test, qui peut éventuellement différer des images d'habituation par sa numérosité et / ou l'identité des personnages. Les images tests peuvent être de quatre sortes selon le nombre de personnages qu'elles contiennent et l'identité des personnages. Pour les analyses, nous avons regroupé les images test en quatre catégories : Nombre Standard (NS), regroupant les images de type 1 et 3 sur le graphique; Nombre Déviant (ND), regroupant les images de type 2 et 4; Objet Standard (OS), regroupant les images de type 1 et 2; et Objet Déviant (OD), regroupant les images de type 3 et 4. B. Schéma illustrant comment les paramètres physiques des stimuli sont contrôlés. Ces contrôles assurent que seuls les changements de numérosité pouvaient expliquer des différences dans les réactions aux stimuli déviants (ND) et aux stimuli standard (NS). Les paramètres extensifs de l'image (luminance totale et espace total occupé) sont égaux pour tous les stimuli test, quelle que soit leur numérosité, et la paramètres intensifs (taille des personnage et espacement moyen entre deux personnages) sont en moyenne constants sur tous les stimuli d'habituation. Ainsi, si nous observons une modulation de la réponse cérébrale au stimuli test en fonction du contexte (différence entre la réponse aux stimuli déviants ND, et aux stimuli standard NS), la seule propriété permettant d'expliquer ce résultat est la numérosité.

extensifs: luminance totale de l'image, surface occupée par l'ensemble sur l'écran) variaient systématiquement d'un stimulus à l'autre, en suivant des régles différentes pour nos deux catégories de stimuli. Ces règles ont été définies afin de nous assurer que seule la discrimination de la numérosité permettait d'obtenir un résultat positif (voir figure 8.1 B). D'une part, pour les stimuli test, les paramètres extensifs (luminance totale, espace occupé sur l'écran) étaient maintenus constants quelle que soit la valeur de la numérosité. Si les bébés se basent uniquement sur les paramètres extensifs des images, ils ne distingueront donc pas entre elles les différentes images test. En conséquence, sur l'ensemble des images test, les paramètres intensifs sont corrélés avec la numérosité : ainsi par exemple, sur les stimuli de test les plus numéreux, les personnages étaient plus petits et plus resserrés. En revanche, pour les stimuli d'habituation, les paramètres intensifs (taille des objets, écart entre les personnages) étaient complètement décorrélés de la numérosité, puisqu'ils étaient tirés aléatoirement à partir d'une distribution uniforme constante, allant de la valeur minimale à la valeur maximale prise par ces paramètres pour les stimuli test. Si les bébés se contentent de faire attention aux paramètres intensifs, ils auront donc la même réaction quel que soit le contexte numérique de l'habituation. Pour étudier l'accès à la numérosité, il nous suffit donc de regarder si les bébés réagissent à un changement de numérosité, par rapport à la situation où la numérosité reste constante, et ce dans des contextes numériques différents.

8.2.2 Procédure

L'expérience comptait 8 blocs de 16 essais, où chaque essai consiste en plusieurs (2 à 5) stimuli d'habituation suivi d'un stimulus test. A l'intérieur de chaque bloc, la présentation des images était ininterrompue.

Chaque image restait à l'écran pendant 1500 ms; le passage d'un essai à l'essai suivant n'était donc pas marqué.

Chaque bébé voyait en tout et pour tout deux numérosités différentes, dont les rôles (numérosité standard / déviante) alternaient d'un bloc au suivant. Trois paires de numérosités ont été utilisées, définissant trois groupes de bébés : grandes numérosités très distantes (4 versus 12, ratio $\frac{12}{4} = 3$), grandes numérosités assez distantes (4 versus 8, ratio $\frac{8}{4} = 2$), petites numérosités (2 versus 3, ratio $\frac{3}{2} = 1.5$). Notons que les contrôles régissant la génération des stimuli ont été calculés séparément pour ces trois groupes : ainsi les stimuli de numérosité 4 ont des caractéristiques physiques différentes selon qu'ils ont été appariés à la numérosité 8 ou 12.

Les personnages constituant le stimulus prenaient successivement le rôle d'objet standard et déviant d'un bloc à l'autre. Afin de prévenir d'éventuels effets de lassitude, dans les huit blocs l'objet standard était différent. L'objet déviant était choisi en sorte que sa couleur et sa forme diffèrent drastiquement de celles de l'objet standard.

8.2.3 Sujets

Trente-six bébés sains (14 filles, 22 garçons), âgés de 92 à 124 jours ont été testés (âge moyen 103 jours). Cent trente-trois autres bébés ont été rejetés pour cause de pleurs (77), de mouvement excessif (31), de défaillance technique de l'appareil d'enregistrement (19), ou de conditions climatiques défavorables à l'appareil (6). L'étude a été approuvée par le comité d'éthique régional de recherche biomédicale, et les parents donnaient leur consentement écrit à la participation de leur enfant.

8.2.4 Enregistrement et analyse de l'électroencéphalogramme

Tout au long de l'expérience, un électroencéphalogramme était enregistré à 250 Hz à l'aide d'un filet géodésique de 64 électrodes, dont l'électrode de référence était située au niveau du vertex. L'enregistrement a d'abord été soumis à un filtre passe-bande entre 0.5 et 20 Hz. Pour chaque essai, nous avons extrait un segment d'enregistrement commençant 400 ms avant la présentation du stimulus et se terminant 2000 ms après la présentation du stimulus; puis les électrodes contaminées par des artéfacts de mouvement étaient rejetées automatiquement, et tous les essais comportant plus de 25 électrodes contaminées étaient rejetés. Les essais restants étaient ensuite moyennées suivant quatre catégories (ND: numérosité déviante; NS: numérosité standard; OD: objet déviant; OS: objet standard). De la même façon, nous avons calculé la réponse moyenne aux images d'habituation. Suivant la procédure classique, pour chaque catégorie, la réponse était ensuite re-référencée par rapport à la moyenne de toutes les électrodes, corrigée pour d'éventuels artéfacts de mouvement en retirant une tendance linéaire à l'ensemble de l'enregistrement, et la ligne de base était corrigée en sorte que la valeur moyenne de l'enregistrement soit zéro sur les 200 ms précédent l'arrivée du stimulus.

A l'aide du test de Student pour échantillons appariés, nous avons contrasté les conditions Nombre Déviant et Nombre Standard (ND-NS) d'une part, les conditions Objet Déviant et Objet Standard (OD-OS)

d'autre part. Au vu du grand nombre de tests réalisés, soit un par électrode et par échantillon temporel, dans un premier temps nous avons considéré les réponses qui étaient significatives pendant une durée suffisante et se déployaient sur plusieurs électrodes voisines. Ceci nous a conduit à définir des clusters spatiotemporels d'activation, en regroupant les observations où la significativité du test dépassait un seuil arbitraire ($|Z| \ge 1.5$) sur des électrodes voisines et pendant plusieurs échantillons de suite. Parmi l'ensemble des clusters ainsi définis, nous avons ensuite conservé les deux plus importants, l'un de signe positif et l'autre de signe négatif. Afin de situer la taille des clusters obtenus par rapport au niveau du hasard, nous avons utilisé une procédure de bootstrapping : le même calcul a été répété plusieurs fois, après avoir mélangé aléatoirement les réponses moyennes aux différentes conditions (ND, NS, OD, OS) pour chaque sujet. Cette procédure de mélange des données nous a permis d'estimer empiriquement la distribution des tailles des clusters et d'estimer le niveau de significativité de nos résultats pour les changements de numérosité et d'objet.

Dans un deuxième temps, nous avons voulu savoir si nos données s'accordaient avec un ensemble de résultats qui avaient été obtenus précédemment dans le laboratoire. Nos travaux s'inscrivent dans un projet de recherche sur la discrimination des numérosités à l'âge de 3-4 mois, initié depuis 1999 par Ghislaine Dehaene-Lambertz et Stanislas Dehaene, aidés successivement de Andrea Patalano, Marcela Pena, et moimême. Dans le cadre de ce projet, plusieurs expériences ont étudié la question de la perception des petits numérosités (discrimination entre 2 et 3), en utilisant des stimuli séquentiels et en général auditifs.

Ces expériences utilisaient aussi le paradigme d'habituation. A chaque essai, le bébé était exposé à quatre stimuli consécutifs, où chaque stimulus consistait en une séquence temporelle de 2 ou 3 événements. Les trois premiers stimuli avaient tous la même numérosité et fournissaient un contexte pour le quatrième stimulus, sur lequel portait le test. Comme dans nos expériences, ce dernier stimulus pouvait être soit de même numérosité que les trois premiers (essais standard : 2 2 2 2 ou 3 3 3), soit d'une numérosité différente (2 2 2 3 ou 3 3 3 2). On isolait les réponses cérébrales évoquées par les stimuli test (séquences de 2 ou 3 sons), et ces réponses étaient contrastées entre elles selon le contexte numérique dans lequel les stimuli tests étaient présentés (essais standards ou déviants).

Bien que les stimuli test étaient toujours les mêmes séquences de 2 et 3 sons, plusieurs types de contextes ont été étudiés (voir figure 8.2 A) : des sons similaires aux stimuli test, des segments de parole de 2 ou 3 syllabes, et enfin des séquences de 2 ou 3 flashs lumineux. Les données du premier groupe (contexte donné sous forme de séquences de sons) ont servi pour définir des fenêtres temporelles et des groupes d'électrodes sur lesquels le changement de numérosité induisait un effet significatif. En moyennant les données des autres conditions (contexte sous forme de syllabes ou de flashes lumineux) sur ces mêmes fenêtres temporelles et pour ces groupes d'électrodes, il est apparu que dans les trois cas, les ondes évoquées par le stimulus test différaient assez tardivement (fenêtre temporelle située entre 725 ms et 825 ms après la présentation du stimulus) entre les stimuli standards et déviants. L'analyse implique deux groupes d'électrodes : six électrodes frontales et huit électrodes pariétales, réparties symétriquement sur les deux hémisphères. Dans le cas d'un stimulus test standard, les potentiels évoqués étaient plus positifs que pour les stimuli déviants sur une région bilatérale occipito-pariétale, et de façon concommittante plus négatifs sur une région frontale (voir figure 8.2 B).

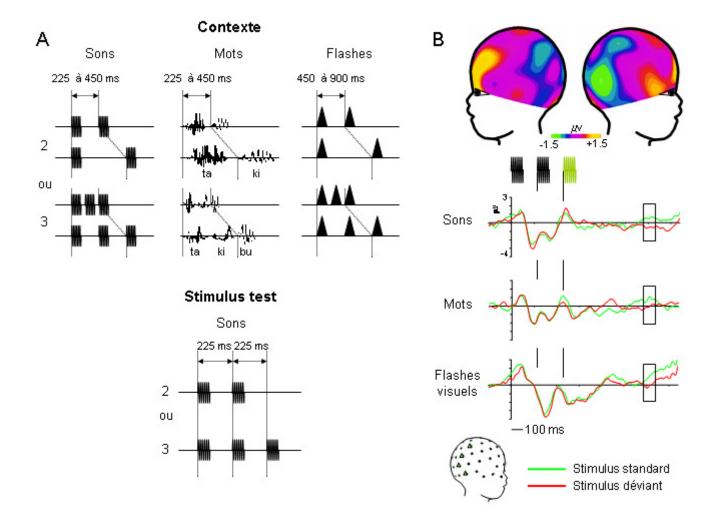


FIG. 8.2 – Réponse à la déviance numérique enregistrée avec des stimuli auditifs. A. Exemple de stimuli d'habituation et de stimuli test utilisés dans ces expériences. Le stimulus test (en bas) consiste toujours en une séquence de 2 ou 3 sons joués à un tempo fixe. Chaque stimulus test est précédé de trois présentations d'un stimulus d'habituation (en haut), qui est soit une séquence de 2 ou 3 sons, soit un segment de parole de 2 ou 3 syllabes, soit une séquence de 2 ou 3 flashes lumineux. Les schémas illustrent comment les paramètres temporels sont contrôlés. B. Topographie de la réponse à la déviance numérique. Les courbes montrent le potentiel en μ V moyenné sur un groupe d'électrodes pariétales à droite en réponse au stimulus test, pour les trois expériences. La carte montre la topographie de l'effet à son maximum, soit 750 ms après la présentation du stimulus.

Afin de savoir si nos données répliquaient cet effet, nous leur avons appliqué exactement la même analyse. Après avoir calculé le potentiel moyen des groupes d'électrodes sur cette fenêtre temporelle, celui-ci était soumis à une analyse de variances à quatre facteurs (trois facteurs intra-sujets : Groupe d'Electrodes (antérieures, postérieures), Hémisphère (gauche, droite), Condition (déviant, standard), et un facteur inter-sujets : Paire numérique (4/12, 4/8, 2/3)). Nous avons recherché la présence d'une interaction significative entre le groupe d'électrodes et la condition expérimentale. Si cette intéraction existe dans notre expérience comme dans les expériences précédentes, cela signifie que les réponses cérébrales obtenues sont comparables malgré les différences dans les conditions expérimentales.

8.3 Résultats

8.3.1 Décours temporel de l'activité cérébrale électrique

Dans les potentiels évoqués par la présentation d'une image, nous reconnaissons la même succession d'ondes classiques, dans toutes les conditions expérimentales ainsi que pour les stimuli d'habituation (voir figure 8.3 A) [Gliga and Dehaene-Lambertz, 2005]. Quatre-vingt dix millisecondes après l'apparition de l'image, une négativité se développe au niveau des électrodes occipitales (N1). Elle disparaît ensuite puis cède la place à une onde de plus grande amplitude, vers 180 ms, négative sur les électrodes occipitales, avec une contrepartie positive pariétale bilatérale (N2). Le dernier événement hautement reconnaissable est la P4, large positivité qui se développe autour de 500 ms sur les électrodes postérieures, tandis que les électrodes antérieures prennent des valeurs négatives. Selon les conditions, la P4 est plus ou moins forte en amplitude et en durée. Ainsi, 800 ms après la présentation du stimulus, on observe toujours une positivité postérieure en réponse à un stimulus test de même numérosité que les images d'habituation; par contre, pour un stimulus test de numérosité déviante, la P4 est pratiquement résorbée à 800 ms (voir figure 8.3 B). Au contraire, pour l'identité des personnages, c'est lorsque l'objet est déviant que la P4 dure le plus longtemps (voir figure 8.3 C).

La difficulté de ce type d'expérimentation où les données sont extrêmement bruitées, et le nombre de comparaisons possibles très élevées, est d'évaluer la significativité statistique des observations. Pour ce faire, nous avons imaginé une analyse par clusters d'activation (voir le paragraphe 8.2.4). Pour la différence entre les conditions Nombre déviant et Nombre standard, nous obtenons deux clusters d'activation (un cluster très étendu où la différence est négative et sa contrepartie positive), qui se développent sur une très large fenêtre temporelle (entre 416 et 1372 ms après la présentation du stimulus, la réunion de ces deux clusters compte plus de 2 électrodes). Ces clusters correspondent à une différence négative entre les deux conditions numériques (NS>ND) sur un ensemble d'électrodes pariétales bilatérales (mais plus étendu à gauche), et une différence positive (ND>NS) sur des électrodes bilatérales préfrontales (voir figure 8.3 D) : ils reprennent donc l'observation décrite ci-dessus, à savoir que la P4 est plus longue et plus ample dans la condition Nombre Standard que dans la condition Nombre Déviant. Afin d'évaluer la significativité de nos résultats par rapport au niveau de bruit présent dans nos données, nous avons estimé la distribution de la taille des deux plus gros

8.3. RÉSULTATS 189

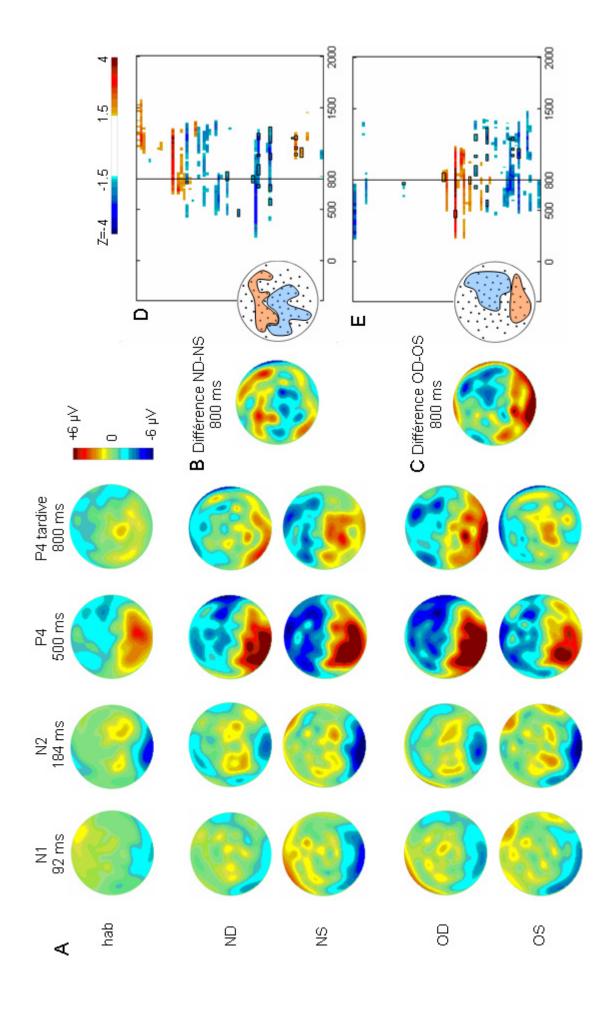


Fig. 8.3 – Décours temporel, effets de changement de numérosité et de changement d'objet. A. Décours temporel de l'activité électrique dans nos cinq conditions : images d'habituation (hab), images tests avec un changement de nombre (NS), images tests sans changement de nombre (ND), images tests avec un changement d'objet (OD), images tests sans changement d'objet (OS). On identifie successivement une négativité occipitale 92 ms après la présentation du stimulus (N1), suivie d'une deuxième négativité plus forte à 184 ms (N2). Vers 500 ms une positivité arrière se développe (P4), et peut durer plusieurs centaines de millisecondes suivant les conditions. Toutes les topographies sont présentées avec la même échelle de couleurs. B et C. La P4 dure plus longtemps lorsque la numérosité test diffère de la numérosité d'habituation; en revanche elle est écourtée lorsque les personnages sont changés au moment du test. Aussi, à 800 ms, on observe une négativité postérieure pour la différence entre les conditions numériques (ND – NS), et une positivité postérieure pour la différence entre les conditions sur l'identité des personnages (OD-OS). Les topographies sont toujours présentées avec la même échelle de couleur. D et E. En D, le graphique montre le décours temporel du niveau de significativité de la différence entre les conditions numériques (ND - NS), sous forme d'un score de Z. Chaque électrode est représentée sur une ligne différente. Sur ce graphique nous n'avons tracé que les données qui correspondent aux deux plus gros clusters (1 cluster positif et un cluster négatif). La carte présente l'emplacement des deux clusters d'activation sur le scalp. En E, les clusters d'activation pour la différence entre les conditions sur l'objet (OD - OS) sont présentés de la même façon. Sur les graphiques D et E, les échantillons activés à la fois pour le changement de nombre et le changement d'objet sont entourés en noir.

clusters de signe opposé, à l'aide d'une méthode de bootstrapping (300 tirages) : dans 4.7% des cas, les deux clusters étaient de taille supérieure à nos clusters liés au changement numérique, nous permettant d'évaluer la sigificativité du résultat à p<0.05.

La différence entre les conditions Objet déviant et Objet standard révèle un cluster positif sur un ensemble d'électrodes occipito-temporales bilatérales, et un cluster négatif sur un groupe d'électrodes pariéto-préfrontales droites (voir figure 8.3 E). Ces clusters se développent en même temps que les clusters numériques (leur réunion compte plus de deux électrodes entre 452 et 1388 ms après présentation du stimulus). De taille équivalente aux clusters aux précédents, ils se situent aussi dans les 5% supérieurs de la distribution estimée. Ici encore, l'analyse confirme donc notre première observation, à savoir que la P4 est plus prononcée dans la condition où il y a eu un changement d'objet.

Ainsi donc, il existe dans nos données une réponse significative au changement de numérosité et au changement d'objet, prouvant en particulier qu'à l'âge de trois mois, le cerveau du bébé est capable d'extraire une information numérique d'une image.

La réponse cérébrale que nous avons enregistrée est-elle propre à l'encodage numérique, ou reflète-t-elle un traitement beaucoup plus général, par exemple la détection de n'importe quel changement? Pour le savoir, nous avons calculé le potentiel moyen sur les deux clusters spatio-temporels numériques, et soumis cette valeur à deux ANOVAs à trois facteurs : 2 facteurs intra-sujets (Cluster : positif, négatif; Condition : stimulus déviant, standard; le facteur condition porte sur la numérosité dans la première analyse, sur l'identité de l'objet dans la deuxième), et un facteur inter-sujets (Groupe : 2/3, 4/8, 4/12). L'analyse révèle une

8.3. RÉSULTATS 191

interaction hautement significative entre le Cluster et la Condition numérique [F(1,33)=65.6, p<0.0001], qui correspond à la réduction de la P4 pour une numérosité déviante. En revanche, nous n'obtenons aucun effet ni interaction de la Condition expérimentale dans le cas d'un changement d'objet [p>0.15]. A l'inverse, la même analyse appliquée aux clusters de changement d'objet révèle une interaction significative entre le Cluster et la Condition d'identité de l'objet [F(1,33)=37.1, p<0.0001], mais aucun effet ni interaction avec la Condition numérique [tous Fs<1]. Ainsi, les clusters d'activation constituent des réponses propres au changement numérique ou au changement de l'identité de l'objet.

Ni la distance entre les nombres, ni leur taille respective n'a d'influence sur la réponse cérébrale que nous observons : dans les analyses précédentes, aucun effet ni aucune interaction faisant intervenir le facteur de Groupe n'était significatif. Nous observons toujours la même absence d'effet, même en regroupant tous les bébés ayant vu des grandes numérosités dans un seul large groupe (groupe petites numérosités : 2/3; groupe grandes numérosités : 4/8 et 4/12) [tous Fs<1]. Ainsi, au niveau des activations cérébrales, nous n'observons aucune discontinuité entre les petites et les grandes numérosités.

8.3.2 Recherche des effets observés dans les expériences précédentes

Dans un deuxième temps, nous avons regardé si nos données répliquaient les résultats obtenus dans trois expériences précédentes, étudiant les numérosités 2 et 3, avec une présentation séquentielle en modalité auditive. Reprenant fidèlement la méthode d'analyse utilisée alors, nous avons calculé l'activité moyenne sur la fenêtre temporelle s'étendant de 725 à 825 ms après le stimulus, pour deux groupes symétriques de huit électrodes pariétales et six électrodes frontales. Le résultat a ensuite été soumis à une analyse de variance à quatre facteurs (trois facteurs intra-sujets : Numérosité : déviante, standard ; Hémisphère : gauche, droit ; Groupes d'électrode : frontal, pariétal ; un facteur inter-sujets : groupes de sujets : 2/3, 4/8, 4/12). L'interaction entre la condition numérique et le groupe d'électrodes approche la significativité [F(1,33)=3.2, p=0.083] : après une modification de la numérosité, la réponse est à la fois moins positive sur les électrodes pariétales et moins négative sur les électrodes frontales (voir figure 8.4). En revanche, le changement d'objet n'interagit pas avec le groupe d'électrodes [F<1].

Ici encore, les interactions sont les mêmes quel que soit le groupe de sujets [interactions triple et quadruple impliquant à la fois le groupe de sujets, le groupe d'électrode et la condition de déviance numérique : Fs<1] (voir figure 8.4). Afin d'être sûrs que la réponse du groupe confronté aux petites numérosités ne différait pas des autres, nous avons appliqué la même analyse après avoir regroupé les deux groupes de sujets confrontés à des grandes numérosités (groupes 4/8 et 4/12) et constaté que même dans ces conditions, les interactions suscitées ne sont pas significatives [Fs<1].

Ainsi, la réponse cérébrale à la déviance numérique que nous obtenons avec des stimuli visuels et simultanés ressemble à celle qui avait été enregistrée dans les expériences précédentes, où les stimuli étaient auditifs (ou croisaient les deux modalités auditive et visuelle) et présentés séquentiellement. Par contre, cette réponse cérébrale n'est pas observée pour un changement non-numérique. Cette réponse cérébrale pourrait reflèter un accès à une représentation numérique abstraite, indépendante du format de stimulus considéré. Par ailleurs,

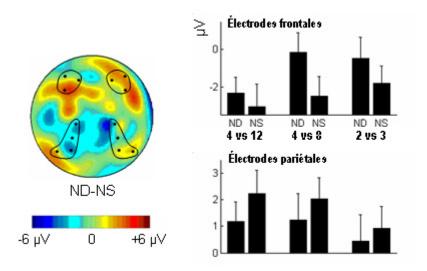


FIG. 8.4 – Effet de changement de numérosité: recherche d'une composante commune avec les expériences précédentes. A gauche, se trouve la topographie de la différence entre les conditions numériques (numérosité déviante – numérosité standard), moyennée entre 725 et 825 ms, sur laquelle sont repérés les quatre groupes d'électrodes identifiés dans les expériences auditives. Les graphiques montrent l'amplitude de l'activité électrique, moyennée sur la fenêtre temporelle, dans les conditions numérosité déviante et numérosité standard, pour les 3 groupes de bébés.

nous n'enregistrons aucune discontinuité entre les petites et les grandes numérosités, suggérant de même que le même format de représentations numériques est utilisé dans tous les cas.

8.3.3 Description de l'effet de changement d'objet

Enfin, nous donnons ici une description de la topographie de l'effet de changement d'objet. Nous nous sommes situés sur la même fenêtre temporelle que pour l'effet de changement de numérosité (725 à 825 ms après la présentation du stimulus), et nous avons défini deux groupes de six électrodes occipitales et centrales (voir figure 8.5 A). Une analyse de variance semblable à celle qui a été appliquée pour rechercher les effets de la déviance numérique révèle une interaction significative entre la déviance d'objet et le groupe d'électrodes [F(1,33)=10.3, p=0.0030] : après une modification de l'objet, la réponse est plus positive sur les électrodes occipitales et plus négative sur les électrodes centrales. De plus, la réponse est plus marquée à droite donnant lieu à une interaction entre le groupe d'électrodes et l'hémisphère [F(1,33)=6.4, p=0.016]. Par contre, nous n'enregistrons aucune interaction entre la déviance numérique et le groupe d'électrodes [F<1]. L'étude de ces groupes d'électrodes isole donc bien une réponse cérébrale propre à la détection du changement de l'identité des objets. De même, il n'apparaissait dans les analyses aucune interaction entre la déviance d'objet, le groupe d'électrodes et le groupe de sujets [p>0.32]. Le changement d'objet a donc bien été traité de la même façon quel que soit ses propriétés physiques, en particulier sa taille (car selon notre méthode de génération des images, les propriétés physiques des objets différaient en fonction des nombres utilisés).

8.4. DISCUSSION 193

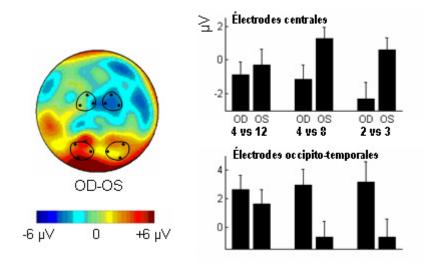


FIG. 8.5 – Effet de changement d'objet. A gauche, se trouve la topographie de la différence entre les conditions sur l'objet (objet déviant – objet standard), moyennée entre 725 et 825 ms, sur laquelle sont repérés les quatre groupes d'électrodes utilisés pour les analyses. Les graphiques montrent l'amplitude de l'activité électrique, moyennée sur la fenêtre temporelle, dans les conditions objet déviant et objet standard, pour les 3 groupes de bébés.

8.4 Discussion

Dès l'âge de trois mois, l'examen de l'activité cérébrale des bébés traduit leur sensibilité à la numérosité : ainsi la réponse à un stimulus est modulée en fonction du contexte numérique dans lequel ce stimulus est inséré, environ 750 ms après la présentation du stimulus. Nous avons observé le même type d'effet dans les activations dans toute une série d'expériences réalisées sur plus de cinq ans, impliquant des stimuli auditifs, visuels, présentés simultanément ou séquentiellement, de petite ou de grande numérosité. Ces résultats suggèrent que les bébés de cet âge ont accès à des représentations numériques d'un haut niveau d'abstraction, communes à différents formats de stimuli, sans distinction pour entre petites et grandes numérosités. En particulier, dans nos derniers travaux expérimentaux, nous présentons aux enfants une suite d'images représentant chacune un ensemble de personnages. La plupart des images ont la même numérosité, mais de temps en temps, nous insérons une image test dont la numérosité peut être différente. Nos trois groupes de bébés présentent la même réponse cérébrale, bien qu'ils aient été confrontés à des paires de numérosités différentes : grandes numérosités plus ou moins distantes pour les deux premiers groupes, petites numérosités plus proches pour le troisième groupe.

Les paramètres non-numériques des stimuli ont été contrôlés pour certifier que ce résultat traduit bien une sensibilité des bébés à la numérosité, et non pas à quelque autre variable de plus bas niveau. Nous avons observé une modulation de la réponse cérébrale à un ensemble donné de stimuli en fonction du contexte numérique dans lequel ces stimuli sont présentés. Les paramètres extensifs des images (luminance totale, surface totale occupée) étaient égalisés sur l'ensemble des images tests, et ne permettaient donc pas de discriminer des stimuli de numérosité différente. Les paramètres intensifs des images de contexte (taille des

personnages, écart moyen entre les personnages) prenaient le même ensemble de valeurs quelle que soit leur numérosité : ainsi si l'attention des bébés était portée exclusivement sur ce type de paramètres, ils devraient avoir le même comportement face aux stimuli test quel que soit le contexte numérique dans lequel ils ont été présentés. Or la réponse cérébrale est modulée en fonction du rapport entre la numérosité du contexte et du stimulus test : ce résultat traduit que c'est bien la numérosité qui a été encodée. Pour les expériences auditives, une méthode similaire de contrôles des variables non-numériques a été utilisée.

Enfin, la réponse cérébrale que nous enregistrons semble assez propre au traitement des quantités numériques, dans la mesure où elle n'est pas observée pour un changement d'identité des stimuli. Elle se développe vers 750 ms après la présentation du stimulus, et sa topographie pourrait évoquer un dipôle pariétal bilatéral.

Représentation des petites et grandes numérosités Contrairement à tout un ensemble de résultats comportementaux récents [Feigenson et al., 2004, Xu, 2003], nos enregistrements suggèrent que des représentations numériques sont extraites sous le même format pour les petites et les grandes numérosités. Comment expliquer alors que les résultats comportementaux divergent entre les petites et les grandes numérosités? Selon l'avis de Feigenson, pour des stimuli de petite numérosité, d'autres propriétés, comme la quantité totale de matière, seraient plus saillantes que la numérosité, et les bébés seraient alors plus enclins à réagir à ces propriétés. Bien qu'ils soient capables d'extraire la numérosité, cette capacité des bébés ne se traduirait donc pas au niveau de leur comportement. En accord avec cette interprétation, Feigenson a récemment montré que sous certaines conditions expérimentales, la numérosité peut devenir une propriété saillante pour les bébés, même pour des petites numérosités telles que 2 ou 3 [Feigenson, 2005]. Nos données sont en accord avec cette théorie : ainsi nous montrons que même pour des petites numérosités, l'information numérique est encodée dans le cerveau.

Niveau de précision des représentations numériques Dans le domaine des grandes numérosités, nos résultats confirment les conclusions de la littérature, à savoir que les bébés sont capables de discriminer des numérosités assez distantes, même lorsqu'on contrôle avec précaution les variables non numériques. La nouveauté de nos travaux est d'étendre ce résultat à des bébés plus jeunes, âgés de 3 mois contre 5 mois au minimum dans la littérature [Wood and Spelke, 2005].

Par ailleurs, il existe une évolution de la précision des représentations numériques, du moins entre 6 et 9 mois [Xu and Arriaga, 2003] : à 6 mois, les bébés sont capables de discriminer deux numérosités séparées par un ratio de 2 (par exemple 8 vs 16, 16 vs 32), mais échouent pour un ratio de 1.5 (8 vs 12, 16 vs 24). A 9 mois par contre, ils parviennent à discriminer 8 de 12, mais échouent pour des numérosités encore plus proches (8 vs 10). En revanche, les bébés de 3 mois semblent être aussi performants qu'à 6 mois, car ils discriminent aussi bien des grandes numérosités séparées par un ratio de 2 (4 vs 8), que des numérosités séparées par un ratio de 3 (4 vs 12). Si on inclut la condition avec des petites numérosités, le score de discrimination s'améliore encore, et atteint un ratio de 1.5 (2 vs 3). Il se peut donc que la précision des représentations numériques n'évolue pas linéairement avec l'âge, mais s'affine assez tardivement (après 6 mois) à partir d'un

8.4. DISCUSSION 195

niveau originel assez grossier.

La remarque précédente doit néanmoins être nuancée, en gardant à l'esprit que notre méthode utilisant les activations cérébrales est peut-être plus sensible que les mesures comportementales utilisées jusqu'ici. Même si la réponse cérébrale montre une discrimination des numérosités 4 et 8, au niveau du comportement des bébés, on n'aurait certainement pas pu voir de distinction entre ces deux numérosités : ainsi, en utilisant le même rythme de présentation des stimuli que nous, Wood et Spelke n'observent aucun effet d'habituation pour les numérosités 4 et 8 chez des bébés plus vieux (5 mois) [Wood and Spelke, 2005]. Nous avons rapporté un phénomène analogue chez des adultes, dans une expérience d'Imagerie par Résonnance Magnétique fonctionnelle [Piazza et al., 2004] : alors que l'activité cérébrale était modulée par la distance entre les numérosités test et le contexte numérique, les sujets ne mentionnaient pratiquement jamais avoir perçu de modification de la numérosité. Ainsi la mesure des activations cérébrales se révèle une mesure plus fine de la précision des représentations numériques que le comportement, du moins lorsqu'il n'est pas explicitement mentionné de faire attention au nombre.

Localisation de la réponse cérébrale Bien qu'elles se développent au même moment, les réponses cérébrales à un changement de numérosité et à un changement d'objet ont des topographies bien distinctes : tandis que le pic de différence se situe au niveau du lobe pariétal pour les changements numériques, pour un changement d'objet, on le retrouve plutôt au niveau d'électrodes occipito-temporales. La divergence observée entre ces deux réponses suggère qu'elles émanent d'aires cérébrales impliquées dans l'encodage propre des propriétés des stimuli, et ne sont pas liées à des processus cognitifs très généraux comme la détection d'un changement ou d'un événement rare.

La localisation des effets numériques, au niveau du lobe pariétal, peut apparaître comme un précurseur de la négativité bilatérale que l'on observe systématiquement dans des tâches de comparaison numérique et de calcul, chez les adultes [Dehaene et al., 1999, Dehaene, 1996], ainsi que les enfants de 5 ans [Temple and Posner, 1998], et qui reflète l'activation d'un système de représentation de la quantité numérique au niveau du sillon intrapariétal [Dehaene et al., 2003], voir chapitre 6. Quant à notre réponse occipitotemporale au changement d'objet, elle rappelle les propriétés du complexe occipito-temporal chez l'adulte, impliqué dans la reconnaissance de stimuli complexes [Hasson et al., 2003, Piazza et al., 2004].

Perspectives Il serait intéressant de placer les résultats que nous obtenons ici dans une perspective développementale. Le protocole expérimental utilisé est très simple et peut être soumis à des bébés et des enfants
de tous âges. En mesurant les mêmes effets à différents âges, il serait possible de tester notre idée, selon
laquelle la réponse pariétale des bébés est de même nature que les ondes pariétales négatives que l'on mesure
chez l'adulte et l'enfant de 5 ans, malgré la différence de latence. Dans la mesure où cette réponse a été pour
l'instant enregistrée sur des stimuli symboliques, il serait également intéressant de voir comment une même
réponse cérébrale est transférée des stimuli non-symboliques aux chiffres arabes au moment où les enfants
apprennent à les lire.

RÉSUMÉ - Recherche des corrélats cérébraux du traitement de la numérosité chez le bébé

L'emploi de méthodes comportementales a permis de découvrir que les bébés de 6 mois sont capables d'encoder la numérosité des stimuli, dès lors que ceux-ci contiennent un grand nombre d'éléments. Ceci vaut à la fois pour des stimuli visuels et auditifs, suggérant que dès 6 mois, les bébés ont accès à une représentation abstraite de la numérosité. Par contre, pour les petites numérosités, les résultats sont mitigés, et semblent dépendre énormément des conditions expérimentales.

Ici, nous utilisons la méthode des potentiels évoqués avec un paradigme d'habituation pour étudier la cognition numérique de bébés encore plus jeunes, âgés de 3 mois. Nos travaux utilisent à la fois des grandes et des petites numérosités. Les stimuli sont présentés visuellement et de manière simultanée (tous les éléments de l'ensemble apparaissent à la fois). Ces études complètent un ensemble d'expériences menées au laboratoire, étudiant la perception des petites numérosités, lorsque celles-ci sont présentées de manière séquentielle et principalement sous forme auditive.

Au niveau des activations cérébrales, un changement de numérosité provoque un effet assez tardif, environ 800 ms après la présentation du stimulus. Ce résultat vaut à la fois pour des numérosités grandes (supérieures à 4) et petites (2 et 3), ainsi que pour tous les formats de stimuli testés. Si les bébés ne parviennent pas à montrer une sensibilité aux petites numérosités dans leur comportement, l'information de numérosité est bel et bien présente dans leur cerveau, encodée sous la même forme que pour les grandes numérosités. En revanche, on ne retrouve pas ce même effet pour un changement d'objet, indiquant que cette réponse traduit l'activité d'aires cérébrales engagées dans l'encodage proprement dit de la numérosité. La localisation de l'effet, sur les régions pariétales bilatérales, est compatible avec les localisations enregistrées chez l'adulte, aussi l'effet trouvé pourrait être un précurseur des effets pariétaux observés chez l'adulte dans tout un ensemble de tâches numériques.

Ainsi, nos données s'accordent avec l'idée que des représentations approximatives de la numérosité d'un haut niveau d'abstraction se développent très tôt, peut-être dès la naissance, et continuent plus tard à intervenir dans la cognition numérique de l'adulte.

Troisième partie

Cognition numérique en l'absence de numéraux

Chapitre 9

Le rôle du langage dans la cognition numérique

Nous avons étudié au cours des chapitres précédents les représentations non-verbales de numérosité, et montré que les bébés ont accès à celles-ci très tôt, bien avant de commencer à parler. Dans nos derniers travaux, exposés ci-après, nous avons cherché à évaluer l'influence du langage sur le développement des concepts numériques (en particulier le concept d'égalité exacte entre les nombres). Avant de décrire ces travaux, nous donnons dans le chapitre qui suit un aperçu du contexte scientifique dans lequel ils s'insèrent.

Les symboles numériques que nous utilisons sont intégrés dans le langage. Ils prennent principalement la forme de mots (les numéraux). Ce sont en général des adjectifs numériques, c'est-à-dire que leur statut grammatical est bien défini, et présente de larges similarités entre les langues. Par exemple, un adjectif numérique est toujours placé avant tous les autres adjectifs, avec une régularité remarquable entre les langues. A côté du lexique numérique proprement dit, les langues développent d'autres marqueurs exprimant les quantités : l'opposition entre pluriel et singulier, le duel et le triel qui sont des marques portées par un nom et/ou l'article associé pour désigner des ensembles comptant respectivement deux ou trois éléments. Citons aussi les quantifieurs, qui expriment des informations quantitatives sur des ensembles ("tous", "quelques", "la majorité", "peu", ...). Dans la suite, nous nous intéresserons principalement à la liste des adjectifs numériques, ou à tout autre système qui soit associé au dénombrement de collections d'objets.

9.1 Revue des systèmes linguistiques numériques existants

9.1.1 Systèmes "primitifs": un, deux, beaucoup

Il serait erroné de penser que toutes les langues ont développé un lexique numérique aussi étendu que le notre. Comme pour les noms de couleurs, il existe un lexique minimal, qui comprend les mots pour "un", "deux", "beaucoup". Dans certaines langues, il n'existe pas d'autre nom de nombre, c'est le cas par exemple chez certains aborigènes d'Australie, comme les Warlpiris [Dehaene, 1997]. Selon les langues, les termes "un" et "deux" peuvent entrer dans des combinaisons qui permettent de dénombrer des ensembles comptant jusque

4 éléments, ainsi par exemple certaines tribus du détroit de Torres (au nord de l'Australie) employaient les mots urapun et okosa pour "un" et "deux", puis les expressions okosa-urapun (soit 2+1) et urapun-urapun (2+2) pour "trois" et "quatre". Au-delà, ils utilisaient ras, qui signifiait "beaucoup" [Ifrah, 1994]. Nous venons de donner deux exemples parmi les tribus Australiennes, mais il ne faut pas croire que ce phénomène soit restreint à cette partie du monde, ni que les langues où on l'observe dérivent toutes d'une même langue ancestrale. On trouve des langues présentant les mêmes caractéristiques en Afrique (Bochimans d'Afrique australe, Zoulous et Pygmés d'Afrique centrale), en Amérique du Sud (les Botocoudos au Brésil, les Indiens de la Terre de Feu), au Sri Lanka (les Vedda)...

Dans les langues où le lexique est plus étoffé, le linguiste Hurford [Hurford, 1987] a noté un certain nombre d'indices qui témoignent de l'ancienneté des mots pour un, deux et trois. Ainsi, dans les langues à déclinaison seuls les trois premiers nombres sont soumis à des variations (un/une en français, zwei/zwo/zween en allemand ancien). Pour ces nombres seulement, les adjectifs ordinaux prennent une forme particulière : ainsi en français premier, second échappent à la régle qui permet de former troisième, quatrième, dixième...

Dans les langues indo-européennes, on retrouve la trace d'un lexique réduit à "un, deux, beaucoup" en examinant leur étymologie : la quantité "deux" est souvent associée à l'idée de l'"autre", comme dans secondaire. Quant au "trois", on retrouve sa racine dans des mots exprimant l'abondance (très, trop, troupe).

9.1.2 Des procédés concrets qui ont permis de dépasser 4

Bien que le système de la base 2 permette à priori de générer une infinité de nombres, on comprend que ce procédé n'ait pas été exploré, tant il devient vite fastidieux d'énoncer de grandes quantités. Cependant des objets vieux de plus de 20 000 ans attestent que nos ancêtres de l'époque avaient déjà commencé à tenir des comptes précis sur des grandes quantités. On trouve ainsi des os présentant des entailles régulièrement espacées, ou regroupées de manière troublante. Ces objets auraient servi de support pour recenser la population, tenir un registre des armes et vêtements, mettant en pratique le principe de la correspondance un à un entre deux ensembles de même numérosité.

Ces pratiques ont-elles précédé ou suivi l'apparition d'un lexique étoffé pour les nombres dans la langue? Bien sûr il est difficile d'apporter une réponse en se référant à la préhistoire, mais des observations intéressantes ont été notées chez les populations actuelles dont le lexique numérique est restreint. Certains peuples ont développé un procédé ingénieux pour évaluer, mémoriser de grandes quantités en l'absence de mots spécifiques, et sans que ce procédé ne nécessite de recours à aucun objet. Les insulaires du détroit de Torrès, parmi d'autres tribus ayant développé un système équivalent, parviennent ainsi à dénombrer jusque 33 éléments en pointant successivement vers diverses parties de leur corps [Dehaene, 1997, Ifrah, 1994] (voir figure 9.1). A chaque nouvel élément, ils pointent vers une partie de leur anatomie, suivant un ordre bien établi : d'abord le petit doigt de la main droite (1), jusqu'au pouce (5), puis le poignet (6), le coude (7), l'épaule (8) de ce même côté, le torse (9), puis ils redescendent le long du bras gauche en suivant la même progression. Une fois arrivé au niveau du petit doigt gauche (17), ils suivent une trajectoire similaire en partant du petit orteil gauche (18), jusqu'au petit orteil droit (33) en passant par les chevilles (23, 28), les genoux (24,27), et les

hanches (25,26). A chaque nouvel élément compté, ils énoncent le nom de la partie du corps sur laquelle ils s'arrêtent.

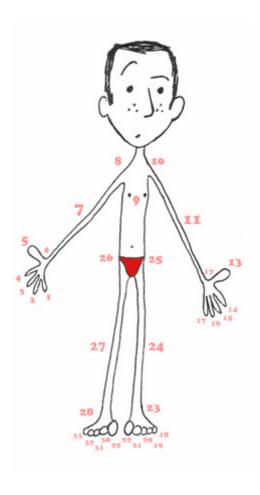


Fig. 9.1 – Certains insulaires du détroit de Torres dénotent les nombres en indiquant du doigt un endroit précis de leur corps.

Ces noms de corps ne constituent pas un lexique numérique, mais sont employés dans des locutions traduisant des quantités, comme "autant de perles qu'il peut y en avoir depuis le petit doigt de la main droite jusqu'au coude de l'autre côté".

9.1.3 Apparition des noms de nombres

Les premiers noms de nombres, symboles arbitraires pour des quantités, sont certainement apparus comme une abstraction de ces procédés. Chaque quantité étant associée de manière non-ambiguë à une même partie du corps, l'évocation du nom de cette partie suffit à désigner la quantité. "coude" ou "épaule" prennent un sens numérique (7, 8), ces mots finissent par évoquer directement la quantité à laquelle ils sont associés, et non plus la suite de gestes qu'il faut produire pour les atteindre. Ils prennent ainsi un sens abstrait, alors que dans la locution citée ci-dessus leur sens restait concret, ils évoquaient réellement une partie du corps : "autant de perles qu'il peut y en avoir depuis le petit doigt de la main droite jusqu'au coude de l'autre côté". Dès lors, ils évoluent indépendamment pour les deux sens qui leur sont associés (partie du corps et quantité),

et on se retrouve parfois avec deux mots différents, l'un pour le corps et l'autre pour la quantité, mais issus d'une même racine. Ainsi, parfois, les noms de nombres gardent très clairement la trace d'un ancien procédé de comptage. Chez les Bugilai de Nouvelle-Guinée par exemple, les 10 premiers nombres se disent de la façon suivante : Tarangesa (main gauche petit doigt), Meta kina (doigt suivant), Guigimeta kina (doigt du milieu), Topea (index), Manda (pouce), Gaben (poignet), Trankgimbe (coude), Podei (épaule), Ngama(sein gauche), Dala (sein droit). Chez les Indiens Lengua du Chaco, au Paraguay, et chez les Zunis, les noms de nombres traduisent aussi limpidement leur étymologie, tandis que les locuteurs n'emploient plus le procédé de comptage gestuel qu'ils suggèrent.

Les procédés décrits ci-dessus sont encore limités, car ils ne permettent pas d'appréhender des quantités au-delà d'une certaine limite, de l'ordre de 30. Le principe de la base constitue une solution à ce problème. Cette solution consiste à privilégier un groupement particulier (5, 10, 12 objets par exemple) et d'organiser la suite des nombres comme des groupement hiérarchisés. Le principe de la base est celui que nous adoptons aujourd'hui : lorsque nous disons "trois cent vingt sept", nous signifions "3 groupes de 10 groupes de 10, 2 groupes de 10, et 7 unités". Chaque nombre y est exprimé comme une suite de multiplications et additions sur des nombres élémentaires, à savoir, les différentes puissances de la base (dix, cent, ...) et les unités, de un jusqu'à neuf. Ceci permet d'exprimer des quantités très grandes à l'aide d'un lexique relativement restreint. Avec un ensemble de 25 mots élémentaires, le français peut exprimer 99999999999 quantités différentes; tandis que le procédé de comptage sur le corps ne dépasse pas 25.

Dans la grande majorité des langues, comme dans la nôtre, c'est la base 10 qui a été privilégiée. On peut y voir la trace d'un ancien procédé de comptage sur les doigts des deux mains. Certaines langues optent cependant pour la base 5, ou 20, et même très souvent on a des systèmes hybrides entre ces différentes bases. Le français porte les stigmates d'un temps où la base 20 était encore communément employée, dans ses quatrevingts, quatre-vingt dix, quatre-vingt treize... En vieux français, l'emploi de formes analogues à quatre-vingts était assez fréquent : pour 60, 120, 140 on disait communément trois-vingts, six-vingts, et sept-vingts.

9.1.4 Le système de numération moderne

Malgré quelques divergences localisées (dont notre quatre-vingts est un exemple), un grand nombre de langues actuelles ont adopté le système décimal. On trouve les exemples les plus purs dans les langues asiatiques : en chinois par exemple, où tous les nombres sans exception sont formés à partir de la même règle. Les noms correspondant aux neufs premiers nombres (yi, èr, san, si, wu, liù, qi, ba, jiu), sont combinés avec des multiplicateurs $10 \ (shi)$, $100 \ (bai)$, $1000 \ (qian)$ et $10000 \ (wàn)$, suivant une stricte décomposition en base 10.327 se lit donc $san bai \`{e}r shi qi$ soit litéralement trois cent deux dix sept.

Enfin, les systèmes numériques développés présentent un certain nombre de caractéristiques communes, identifiées par le linguiste Hurford [Hurford, 1987]. Ce sont autant de principes sans lesquels les systèmes numériques verbaux ne seraient pas si efficaces; il y a fort à penser que les langues ont convergé vers un état asymptotique, vers lequel les a conduit la recheche d'une efficacité maximale. Lorsque cet état asymptotique est atteint, les noms de nombres entrent en bijection avec l'ensemble des entiers naturels.

Chaque entier naturel possède un nom¹. Réciproquement, les noms de nombres sont totalement non-ambigus, on ne relève pas d'homonymes. Quant aux cas de synonymie, ils sont extrêmement rares, souvent l'une des formes synonymes suit strictement les règles syntaxiques de la suite numérique, tandis que les autres sont des subsistances d'un état plus ancien de la langue (ex. onze-cents). Enfin, toutes les langues s'accordent sur les moyens, puisque la construction des noms de nombres utilise universellement le principe de la récursion, selon lequel les noms des grands nombres contiennent souvent des noms de nombres plus petits.

9.1.5 Le système occidental : des mots au sens exact ou approximatif

Bien que tous les entiers soient associés à un mot, certains de ces mots ont un sens particulier. On peut dire que "19 c'est à peu près 20", mais on ne dira pas que "20 c'est à peu près 19" [Rosch, 1975] : certains nombres peuvent être pris comme référents. Ce sont souvent des nombres ronds. La rondeur d'un nombre est une propriété qui reçut plusieurs définitions différentes. Nous retiendrons celle des "nombres favoris" de Pollmann et Jansen [Pollmann and Jansen, 1996] : si b est la base du système numérique, l'ensemble des nombres favoris comprend les puissances nièmes de b (soit 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100, 1000, ... en base dix), le double de chacune de ces valeurs (0.002 ... 2000 ...), la moitié (0.0005 ... 500 ...) et le quart (0.00025 ... 250 ...). En base soixante, celle qu'on utilise par exemple pour mesurer le temps, cet ensemble comprend les nombres (1/60, 1, 60, 3600, 1/30, 2, 120, 1/2, 30, 1/4, 15) qui correspondent à des références en matière de durée.

Ainsi, un nombre véhicule deux informations complémentaires : une quantité, et la précision avec laquelle cette quantité est donnée. Selon mon dictionnaire édité en 1991, Paris compte 2 159 000 habitants, et son agglomération 8 761 710. Ces chiffres suggèrent que le recensement n'a pas été opéré de la même façon dans les deux cas : si on donne 2 159 000 habitants, cela sous-entend que la précision est de l'ordre du milliers (il peut y en avoir entre 2 158 000 et 2 160 000), par contre nous avons peu de doutes que le nombre 8 761 710 soit précis.

En utilisant la métaphore introduite au chapitre 3, nous dirons que les nombres ronds renvoient à une région plus étendue de la ligne numérique. En considérant la liste de nombres ronds proposés par Pollmann et Jansen, il s'avère que ceux-ci s'accordent assez bien à la loi de Fechner, selon laquelle l'échelle de la ligne numérique est logarithmique : les nombres ronds de l'ordre des dizaines sont (10, 20, 25, 50), ceux de l'ordre de la centaine sont (100, 200, 250, 500). Cet échantillonage correspond assez bien à une segmentation régulière sur une échelle logarithmique. Dehaene et Mehler [Dehaene and Mehler, 1992] relèvent les fréquences d'occurence des nombres dans plusieurs langues à priori très différentes, allant du français au japonais. Dans toutes ces langues, ils notent des pics dans la fréquence d'occurence autour des nombres 10, 12, 15, 20, 50 et 100, qui en accord avec les avis de Pollmann et Jansen, et de Channel [Channel, 1980], sont d'assez bons candidats à la "rondeur". Postulant que la fréquence d'occurence d'un mot doit être proportionnelle à la largeur de l'intervalle numérique qu'il couvre, ils parviennent à reconstruire la tessiture de chaque mot : "10"

¹jusqu'à une certaine limite pour le lexique courant, mais les mathématiciens ont réussi à contourner ce problème en introduisant la notation des puissances de 10

couvre l'intervalle 9-11, "15" couvre 14-16, quant à "20", il englobe déjà le nombre 17. Plus loin, on notera surtout "50" qui couvre deux dizaines de 40 à 60, et "100" qui s'étend sur près de 6 dizaines (voir figure 9.2).

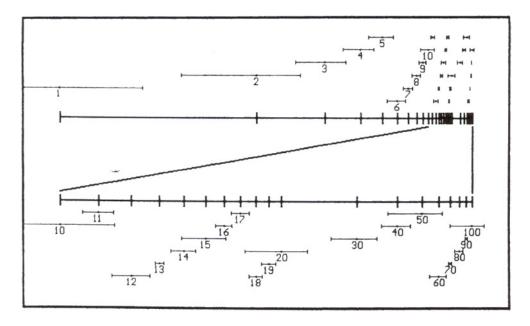


FIG. 9.2 – Ligne numérique et tessiture des numéraux reconstruite d'après leurs fréquence en anglais (les mêmes résultats ont été obtenus en utilisant d'autres langues). La partie du bas est un agrandissement d'une partie de la ligne numérique, représentée en entier au-dessus. La longueur des segments est proportionnelle à la fréquence d'occurence des numéraux et représente sa tessiture. Les numéraux "ronds" comme 10, 12, 15 ou 20 ont une tessiture plus large. Reproduit depuis [Dehaene and Mehler, 1992].

A la lumière de ces considérations, apparaissent les règles syntaxiques implicites qui régissent l'emploi d'expressions telles que "4 ou 5 enfants", "12 ou 13 oeufs". D'après l'étude systématique de Pollmann et Jansen, tous les nombres ne peuvent pas être ainsi appariés. L'un des deux au moins doit être un nombre rond, en sorte que les zones activées par ces quantités sur la ligne numérique se recouvrent partiellement.

9.2 Le langage comme support à l'arithmétique exacte

Nous avons exposé dans le paragraphe 2.3 un ensemble de données sur la dissociation entre calculs exacts et approximatifs. En particulier, certains patients perdent la capacité d'effectuer des calculs exacts. C'est le cas par exemple de Monsieur Nau [Dehaene and Cohen, 1991] et d'autres patients souffrant comme lui de lésions massives de l'hémisphère gauche [Dehaene and Cohen, 1997, Grafman et al., 1989, Warrington, 1982, Pesenti et al., 1994], et des patients alexiques [Cohen et al., 1994]. Nous retrouvons le même comportement chez des patients calleux, dès lors que les stimuli sont présentés exclusivement à l'hémisphère droit [Gazzaniga and Hillyard, 1971, Gazzaniga and Smylie, 1984, Cohen and Dehaene, 1996, Seymour et al., 1994]. A l'exception des patients alexiques et calleux, tous les cas cités ci-dessus présentent une forme d'aphasie, suggérant que la perte d'exactitude dans les réponses numériques est peut être liée à la perte du langage. Quant aux patients alexiques et calleux, leur comportement a été expliqué en termes de rupture de connexions : les chiffres identifiés par l'hémisphère droit seulement, ne parviennent pas à accéder à l'hémisphère gauche où

se trouvent les centres responsables du langage.

L'étude de ces patients nous avait renseigné sur les capacités du système non-verbal de représentation de la quantité. Nous abordons de nouveau ces données ici, avec une autre question en tête : cette fois, nous nous intéressons à ce que ces patients ne savent plus faire, avec l'idée que la maîtrise du langage est indispensable pour résoudre certaines tâches numériques.

Quel pourrait être le rôle du langage dans ces opérations? Une première explication, hypothèse minimale, suggère que le langage intervient parce qu'il procure un code efficace, quand les représentations sémantiques, approximatives, ne permettent pas de résoudre la tâche. Un deuxième courant de pensée a proposé une hypothèse plus forte, selon laquelle le langage joue un rôle crucial dans le développement. Carey [Carey, 2001] présente ainsi un scénario où l'enfant comprend que chaque mot réfère à une quantité exacte en pratiquant le comptage et en manipulant la suite des nombres.

9.2.1 Le langage comme outil de calcul

Implication dans le calcul exact

Contrairement aux représentations sémantiques, le code verbal des nombres fournit une liste de symboles précis à l'unité près. Il semble donc naturel de penser que les tâches exactes ne pourront être résolues qu'en faisant appel au code verbal. L'expérience de Spelke et Tsivkin sur des sujets bilingues [Spelke and Tsivkin, 2001] que nous avons exposée dans le paragraphe 2.3 en apporte une preuve. Cette expérience révèle une différence d'encodage entre des problèmes exacts (retrouver le résultat exact d'une addition) et des problèmes approximatifs (choisir le nombre qui se rapproche le plus du résultat d'une addition). Contrairement aux problèmes approximatifs, les problèmes exacts sont encodés dans un format spécifique à la langue d'apprentissage. Cette expérience suggère que les sujets n'ont pas pu utiliser la stratégie qu'ils employaient pour les problèmes approximatifs pour résoudre les problèmes exacts. Pour en donner une autre formulation, ce format sensible à la langue qu'ils ont utilisé dans les problèmes exacts, leur permettait justement d'accéder à la valeur précise du résultat.

Des dissociations entre opérations

Soit qu'elles requièrent une plus grande précision que les additions, ou que nous n'ayions aucune intuition quantitative pour cette opération, les multiplications semblent reposer sur un code de nature verbale. Pour le mettre en évidence, Lee et Kang [Lee and Kang, 2002] ont utilisé un paradigme de double tâche. En même temps qu'il effectue des multiplications, le sujet doit faire une deuxième tâche, qui consiste à mémoriser un non-mot (tâche phonologique) ou une figure géométrique (tâche visuo-spatiale). La tâche phonologique ralentit les multiplications, tandis que la tâche visuo-spatiale ne perturbe pas leur exécution. Au contraire, lorsqu'on remplace les multiplications par des soustractions, celles-ci sont affectées par la tâche visuo-spatiale mais aucun ralentissement n'est observé dans la condition phonologique. Les multiplications requièrent donc la manipulation d'un code verbal.

En neuropsychologie, la dissociation entre soustractions et multiplications a été reportée à plusieurs reprises. On trouve à la fois des patients qui sont meilleurs en multiplications qu'en soustractions [Dehaene and Cohen, 1997, Lemer et al., 2003, Delazer and Benke, 1997, Van Harskamp and Cipolotti, 2001], et d'autres qui présentent la dissociation inverse [Cohen and Dehaene, 2000, Dagenbach and McCloskey, 1992, Dehaene and Cohen, 1997, Lampl et al., 1994, Lee, 2000, Pesenti et al., 1994, Van Harskamp and Cipolotti, 2001, Lemer et al., 2003, Jefferies et al., 2005]. La présence d'une aphasie chez ce deuxième ensemble de patients n'est pas systématiquement reportée ni testée, sauf dans certains cas [Cohen et al., 2000, Dehaene and Cohen, 1997, Jefferies et al., 2005]. Dans une étude longitudinale d'un cas de démence sémantique, Jefferies, Bateman et Lambon Ralph montrent comment les performances de la patiente sur les nombres oraux ou écrits en toutes lettres se dégradent au fil du temps, tandis qu'elle reste capable de résoudre des tâches portant sur la magnitude. Quatre ans après le début de la maladie, la patiente montre de sérieuses difficultés à lire, comprendre et retenir les noms des nombres; testée sur des tâches de calculs, elle montre de bonnes performances en addition et soustraction, mais échoue pour l'ensemble des multiplications.

Du modèle précédent, on peut tirer une prédiction très claire : un patient qui ne parvient pas à manipuler des nombres dans un format verbal doit être incapable d'effectuer des multiplications. Or, nous recensons plusieurs cas de patients, très mauvais en lecture de nombres, mais performants en multiplication (ainsi que pour les autres opérations) [Cipolotti and Butterworth, 1995, Whalen, 2002, Garcia-Orza et al., 2003]. Ces troubles s'expliquent en général assez bien en invoquant un déficit de surface. Ainsi le patient étudié par Garcia-Orza, Leon-Carrion et Vega, peut donner le résultat correct de "7 * 3" ("vingt-et-un") bien qu'il lise le problème "quatre fois trois". En lecture de mots, une dyslexie phonologique a été diagnostiquée : il est incapable de lire des non-mots, qui exigent d'utiliser les règles de conversion graphèmes-phonèmes. Il est possible que ce déficit, diagnostiqué sur la lecture de mots, reflète la perte d'une voie assez générale, chargée de convertir des symboles visuels sous leur forme phonologique. Il reste tout de même assez troublant que la production de nombres soit plus ou moins affectée selon la tâche, et que la situation la plus détériorée puisse être celle de la simple lecture de chiffres ou de mots. Cela implique que nous devons postuler l'existence de voies directe de conversion entre les symboles numériques, voies qui peuvent être sélectivement touchées par une lésion.

Les données de l'imagerie cérébrale apportent un support partiel à l'hypothèse selon laquelle les multiplications font appel à un code verbal. Dans le chapitre 6, nous avons résumé un ensemble des données qui convergent sur le gyrus angulaire, et l'associent à l'exécution des multiplications [Chochon et al., 1999, Lee, 2000], au calcul exact [Dehaene et al., 1999, Stanescu-Cosson et al., 2000], ainsi qu'à certaines tâches non-numériques, en rapport avec le langage (détection de phonèmes : [Simon et al., 2002], mémoire de travail verbale et lecture : [Fiez and Petersen, 1998]). Cependant cette aire ne fait pas à proprement partie parler des aires classiquement associées au langage, et certains contestent même qu'elles puissent avoir un rapport avec le traitement linguistique [Houdé and Tzourio-Mazoyer, 2003, Gelman and Butterworth, 2005]. Qu'en est-t-il alors des aires du réseau du langage classique? Les résultats sont très partagés à ce sujet : certains reportent que les régions périsylviennes sont activées pendant des tâches de multiplication ou d'addition exacte

[Dehaene et al., 1999, Stanescu-Cosson et al., 2000, Delazer et al., 2003, Kawashima et al., 2004], alors que d'autres constatent au contraire que cette aire est déactivée par rapport au repos dans la multiplication [Pesenti et al., 2000, Zago et al., 2001].

Apparté : comment résout-on une soustraction exacte?

Les deux paragraphes précédents exposent les idées suivantes : premièrement, les calculs exacts font appel à un format numérique verbal. Deuxièmement, les multiplications, contrairement aux soustractions, utilisent elles aussi un format verbal. Nous comprenons que la multiplication puisse être liée au langage : parce que les tables de multiplication font l'objet d'un apprentissage par coeur, maintes fois répétées sous un format verbal, et très certainement mémorisées sous cette forme. Egalement parce que la multiplication est une opération exacte. Mais nos deux constations posent une question : comment peut-on résoudre des soustractions exactes sans faire appel au langage? De la même façon, comment peut-on effectuer des comparaisons de chiffres arabes à l'unité près quand cette tâche est censée reposer sur un code analogique qui est approximatif?

Dans leur modèle de réseau de neurones, Verguts et Fias [Verguts and Fias, 2004] introduisent une idée intéressante qui peut résoudre ce paradoxe. Nous avons vu que les enregistrements électrophysiologiques chez le singe révèlent des neurones qui sont accordés sur une numérosité préférée, et répondent de manière approximative aux numérosités voisines. Jusqu'ici, les enregistrements n'ont été réalisés que pour des stimuli non-symboliques. Dans le modèle de Verguts et Fias, ces neurones répondent de façon approximative pour les stimuli non-symboliques, et de façon exacte pour les stimuli symboliques, qui sont eux-mêmes exacts. La même population possède donc des caractéristiques différentes selon le type de stimulus, avec une fraction de Weber quasi-nulle dans le cas des stimuli symboliques. Il est possible que le fait que les neurones répondent de façon approximative dans le cas de stimuli non-symboliques soit lié à l'extraction de la numérosité, qui est un processus imprécis. Les neurones en eux-mêmes coderaient pour une numérosité précise, mais ils "se tromperaient" souvent. C'est ainsi que les soustractions, même exactes, pourraient être résolues à l'aide d'une représentation de nature sémantique.

9.2.2 Le rôle du langage dans le développement de la cognition numérique

Trois théories

Au delà de l'utilisation d'un code verbal pour résoudre quelques tâches particulières, certains ont proposé que le langage puisse être fondamental au développement de la cognition numérique. Ainsi, les vues extrêmes, défendues par des linguistes comme Hurford [Hurford, 1987] ou Chomsky [Hauser et al., 2002], soutiennent que les nombres, et les mathématiques en général, sont bâtis sur les principes de récursivité participant au traitement de la syntaxe. Pour citer Hurford: ... the number faculty emerges through the interaction of central features of the language faculty with other cognitive capacities relating to the recognition and manipulation of concrete objects and collections. The relevant features of the language faculty inculde the pairing of words with concepts by the linguistic sign and highly recursive syntax. It is therefore not necessary to postulate an

autonomous 'faculty of number' as a separate module of mind. Ces auteurs ne se prononcent pas sur l'interaction entre les mathématiques, qui seraient une élaboration abstraite, et notre système de représentation non-verbale des quantités. Poursuivant leur raisonnement, il nous apparaît que ces deux activités cognitives doivent leur apparaître comme deux modules indépendants; s'il existe une interface entre ces deux modules, elle a dû être faire l'objet d'un apprentissage ultérieur à la mise en place de ces deux modèles.

A l'autre extrême, d'autres postulent que le langage n'intervient pas dans le développement des facultés numériques; le sens des nombres [Dantzig, 1967] tel qu'ils l'imaginent serait un ensemble de concepts nonverbaux, qui prennent comme objet les representations non-verbales de quantités que nous avons introduites plus haut [Dehaene, 1997, Gelman and Butterworth, 2005]. Sur ces représentations de quantités, les bébés et les animaux sont capables d'effectuer des opérations élémentaires, comme l'addition, la soustraction, l'ordre. Les défenseurs de cette deuxième vue imaginent le langage comme un simple outil qui permet d'améliorer les performances, en particulier sur des tâches qui nécessite un accès aux quantités exactes. Dans ce cadre, le langage peut être remplacé par n'importe quel outil, procédure qui permettent de différencier les nombres de façon exacte : procédé de comptage sur les doigts et autres partie du corps, pratique de l'entaille et du nouage de cordes, dessins géométriques sur le sol...

Dans le même esprit, Gelman et Gallistel [Gelman and Gallistel, 1978] ont proposé l'idée que les enfants connaissent les principes définissant le comptage bien avant de savoir les utiliser². Ces principes guideraient l'acquisition de la liste des numéraux par l'enfant. Gelman et Gallistel invoquent comme preuve le fait que les enfants comptent parfois sans utiliser la méthode traditionnelle, qui préconise de considérer les éléments à compter de la gauche vers la droite. De même, si certains enfants utilisent une liste idiosyncratique de numéraux, celle-ci suit le principe de la stabilité de l'ordre : par exemple, la liste serait "un, deux, quatre, douze, huit, ...", toujours récitée dans cette ordre. Par ailleurs, Gelman et Meck [Gelman and Meck, 1983] ont montré que les enfants savent détecter des erreurs de comptage chez autrui, sans pour autant rejeter systématiquement les essais où le comptage n'a pas été effectué suivant la méthode traditionnelle (de gauche à droite). Selon Gelman et Gallistel, ces données indiquent que les enfants connaissent quelle est la signification du comptage.

A mi-chemin entre le point de vue de Chomsky et celui des défenseur du sens des nombres, certains pensent que le développement de la cognition numérique requiert une interaction entre le langage et le sens

- principe de la correspondance bijective : chaque élément de l'ensemble à compter doit être associé à une et une seule étiquette.
- principe de la stabilité de l'ordre de la liste : les étiquettes doivent toujours être énoncées dans le même ordre.
- principe de cardinalité : le dernier mot énoncé représente la numérosité de l'ensemble.
- principe d'abstraction : on peut compte toute sorte de collections.
- principe de la non-pertinence de l'ordre des objets : l'ordre dans lequel les éléments de l'ensemble sont appréhendés n'a pas d'importance.

²Gelman et Gallistel identifient une liste de 5 principes. Ces principes sont donnés ci-dessous pour des étiquettes verbales, mais sont généralisables à d'autres types d'étiquettes : Gelman et Gallistel pensent en particulier qu'on peut compter à l'aide de représentations non-verbales.

des nombres. Cette thèse est défendue par exemple, par Carey [Carey, 2001] dans sa théorie du bootstrapping. Carey suppose que le langage, en particulier la pratique du comptage qui familiarise l'enfant avec les noms de nombre, agit comme un révélateur sur les représentations numériques non-verbales, pour que l'enfant découvre les principes selon lesquels cette suite est organisée et les généralise à des nombres plus grands. Cette théorie a été inspirée par des données de Wynn [Wynn, 1990]. Elle s'appuie également sur les idées de Fuson [Fuson, 1988]. Selon celle-ci, quand on demande aux enfants combien d'objets il y a et qu'ils répètent en réponse à cette question le dernier mot de leur compte, ils appliquent une règle (la règle du dernier mot), sans comprendre le sens de leur réponse. Ces enfants ne possèderaient donc pas le principe de cardinalité, pour reprendre la terminologie de Gelman. En dehors du contexte où la question "combien?" est posée directement, Wynn observe que le comptage n'est pas utilisé.

La tâche diagnostique de Wynn, qu'elle a baptisée donne-moi un nombre (qive-a-number), consiste à demander à l'enfant d'apporter un certain nombre de jouets. L'expérimentateur demande par exemple 6 jouets. L'enfant dispose d'un tas de figurines, il doit piocher dedans et rapporter ce qu'on lui a demandé. Si l'enfant s'est trompé, l'expérimentateur le lui signale et lui demande de se corriger. Jusqu'à un moment critique du développement, les enfants ne comptent pas pour réaliser cette tâche : ils saisissent une pleine poignée de jouets et l'apportent à l'expérimentateur. Vers 3 ans $\frac{1}{2}$, l'enfant se met tout d'un coup à compter les jouets, et si le nombre de jouets qu'on lui demande ne dépasse pas la limite de ses capacités de comptage, les réponses qu'il donne à la tâche de Wynn sont justes. Pour être exacte, avant de parvenir à ce stade, les enfants ne traitent pas tous les nombres de manière équivalente. Les plus jeunes distinguent seulement le nombre un de tous les autres : quand on leur demande plusieurs jouets, ils se saisissent invariablement d'une poignée; par contre quand on leur en demande un, ils en ramènent effectivement un seul. Plus tard, l'enfant comprend également le nombre deux : il parvient à donner le nombre exact de jouets quand on lui en demande un ou deux; pour tous les nombres plus grands que deux, il saisit une poignée, qui contient toujours plus de deux jouets. Puis, il se met à comprendre de la même façon le nombre trois. La découverte surprenante de Wynn, est que lorsque l'enfant se met à comprendre le nombre quatre, il comprend en même temps tous les autres nombres; c'est à ce moment-là qu'il se met à utiliser le comptage. En fait, avant cette étape, les nombres un, deux, trois étaient compris comme des quantifieurs. L'enfant n'utilise jamais le comptage pour s'assurer qu'il a pris la bonne quantité (alors qu'il le fera plus tard même pour ces petits nombres), il saisit tous les jouets qu'il lui faut à la fois, et se trompe finalement assez souvent. Selon les propriétés syntaxiques de la langue qu'il parle, ces premiers nombres sont acquis de manière différente : en japonais et en chinois, le pluriel n'est pas marqué sur les noms, et les enfants mettent quelques mois de plus à différencier le nombre un qu'en Amérique. A l'inverse, en russe la marque du pluriel est modulée selon qu'on considère des ensembles de 2, 3, 4, ou plus de 4 éléments. Contrairement aux enfants américains, les petits Russes comprennent rapidement, même avant de maîtriser le comptage, qu'il faut donner plus de poupées quand on leur en demande cinq que pour deux, trois, ou quatre [Carey, 2004].

Le scénario que Carey dresse pour expliquer toutes ces données est le suivant : initialement, l'enfant possède les capacités de discriminer les numérosités 1, 2, 3. En écoutant le langage, soit la suite des nombres,

soit d'autres éléments linguistiques comme les marqueurs du pluriel, il apprend successivement à associer les premiers noms de nombres avec ses représentations non-verbales de numérosité. Comme il ne posséde pas de représentation non-verbale précise pour les nombres au-delà de 4, tous les autres noms de nombre sont associés à des quantités floues, et lui semblent synonymes. A force de pratiquer la routine du comptage, l'enfant comprend le principe qui régit la suite des entiers : on passe au suivant dans la liste en ajoutant un élément.

Ce qui est important dans le langage

De même qu'elles divergent sur le rôle qu'elles prêtent au langage, ces trois théories diffèrent quand il s'agit de définir ce qu'elles considèrent comme crucial au sein de cette faculté composite qu'est le langage. Selon le premier groupe d'auteurs, la manipulation des nombres exacts repose entièrement sur le langage; à un stade mature, l'ensemble des systèmes de traitement du langage seront cruciaux. Comme elle serait à la base du développement du langage lui-même, c'est ce qu'on appelle la faculté de langage qui permettrait de développer le concept du nombre entier naturel exact (comprenant l'ensemble des lois de combinaisons entre nombres, la notion d'infinité discrète). Au terme d'une analyse rejetant la coordination motrice, la phonologie, le symbole, le concept abstrait, Hauser, Chomsky et Fitch [Hauser et al., 2002] identifient la récursion comme le seul composant purement humain du langage. Le langage est récursif au niveau de sa syntaxe, en effet beaucoup de règles de grammaire définissent les groupes syntaxiquement valides à partir de groupes plus élémentaires et également valides. Par exemple, la règle suivante sur le groupe nominal, qui décrit l'ajout d'un adjectif : GROUPE NOMINAL = ADJECTIF + GROUPE NOMINAL, peut être répétée autant de fois qu'on veut, le résultat sera toujours un groupe nominal valide. De la même façon, on construit l'ensemble des entiers naturels par récursion à partir de la fonction successeur, qui à un entier n associe n+1. Au sein de la faculté de langage, la faculté de comprendre la récursion apparaît nécessaire au développement de la cognition numérique. Bien plus, pour ces auteurs, l'ensemble des nombres, et des mathématiques utilise des systèmes dédiés au traitement du langage même dans le cerveau mature.

Plus restrictifs sur le rôle que joue le langage dans le développement, les défenseurs du "sens du nombre" supposent que tout l'appareil conceptuel est en place avant que les quantités n'aient été liées au langage. En particulier la structure récursive de l'ensemble des nombres serait implémentée comme propriété des représentations non-verbales, analogiques de quantité. Pour être utile, le langage devra fournir des outils performants : ce qui apparait crucial sous cette hypothèse, c'est que la langue possède des noms de nombres, et qu'un ensemble d'outils culturels permettant d'effectuer des opérations rapidement et efficacement aient été appris. Le comptage, comme procédure permettant une appréhension rapide et précise du nombre d'éléments dans un ensemble, fait partie de ces outils culturels.

Enfin, pour la théorie du *bootstrapping*, il est important non seulement de posséder des noms de nombres, mais aussi de les pratiquer sous forme d'une suite numérique, sans cela la révélation de l'enfant sur la structure des entiers ne peut avoir lieu. La pratique du comptage, dès le plus jeune âge, est donc cruciale au développement des concepts numériques exacts.

Concepts exacts des nombres et concept de nombre exact

Quelle est l'ampleur de la transformation que vivent les enfants de 3 ans $\frac{1}{2}$? R. Gelman et Butterworth [Gelman and Butterworth, 2005] introduisent une distinction intéressante. Lorsque l'enfant comprend le principe de la suite des entiers, doit-on penser qu'il acquiert à ce moment-là le concept du nombre, c'est-à-dire qu'il découvre qu'il existe des numérosités différentes à l'unité près, et qu'on passe de l'une à l'autre en ajoutant ou enlevant un(des) élément(s)? Ou acquiert-il tout un ensemble de concepts numériques comme cinq, six, dix-huit, c'est-à-dire qu'il parvient grâce à sa nouvelle découverte à associer à chaque nom de nombre la bonne numérosité, mais qu'il savait déjà que les valeurs des numérosités sont exactes, sans disposer des outils cognitifs nécessaires pour les distinguer? Dès 18 mois, les enfants savent qu'on change la numérosité des petits nombres en ajoutant ou retirant un élément [Starkey, 1992], mais qu'en est-il des grandes numérosités, celles qui ne sont pas accessibles via le système de pointeurs attentionnels? Les données de Sarnecka et S. Gelman [Sarnecka and Gelman, 2004] penchent en faveur de la deuxième option (l'enfant posséde un concept d'égalité exacte avant d'apprendre les noms des nombres). Elles étudient des enfants qui n'ont pas encore accédé à l'étape où ils réussissent la tâche de donner un nombre. Dans un de leurs tests, elles montrent à ces enfants deux bols contenant 6 objets, en leur indiquant oralement le nombre d'objets qu'ils contiennent :"this bowl has six pennies, and this bowl has six pennies". Puis elles rajoutent des objets dans l'un des deux bols, et demandent à l'enfant d'indiquer le bol où il y a toujours six objets. Tous les enfants, même ceux qui sont au tout premier stade de développement (ils ne distinguent que le nombre un à la tâche donner un nombre), indiquent le bol où la numérosité est la même qu'au départ. Dans un deuxième temps, elles rejouent exactement le même scénario, mais en remplaçant le mot six par le quantifieur a lot (il y a toujours 6 objets dans les bols au départ). Dans cette deuxième condition, les enfants choisissent le bol où la numérosité a été changée. Les nombres ne sont donc pas traités comme des quantifieurs comme les autres. Un autre test met en évidence que les enfants associent une valeur exacte aux nombres. Elles utilisent une boîte opaque, où elles placent un certain nombre d'objets, tout en indiquant la quantité exacte à l'enfant : "Here are five moons". Elles procédent alors à quelques manipulations sur la boîte, qui selon les conditions modifient (ajout ou retrait d'un objet) ou pas (secousses) le nombre d'objets qu'elle contient. A la question "now how many moons, is it five or six?" les enfants ne choisissent le nombre de départ que dans les conditions où la numérosité n'a pas été modifiée. Ils montrent donc ainsi qu'ils comprennent que ces mots réfèrent à des quantités exactes à l'unité près. En utilisant un test similaire, Lipton et Spelke [Lipton and Spelke, 2005] montrent que des enfants un tout petit peu plus vieux savent que les mots numériques réfèrent à des quantités exactes bien au-delà de leur limite de comptage.

Selon ces dernières données, le concept de nombre exact serait indépendant du langage. Il se pourrait que le concept de nombre exact se développe à partir des expériences sensori-motrices de l'enfant, en particulier lorsqu'il manipule ses doigts et les met en correspondance avec les éléments des ensembles [Fayol and Seron,]. En neuropsychologie, on trouve aussi des cas de développement pathologique où les patients parviennent à développer un système numérique en l'absence de langage [Butterworth, 1999]. Mais ces cas restent des exemples isolés, il est difficile d'en extraire des conclusions définitives.

RÉSUMÉ - Rôle du langage dans la cognition numérique

De la pratique de l'encoche comme support pour comptabiliser les éléments d'un ensemble, à nos systèmes linguistiques élaborés pour exprimer des nombres jusqu'aux myriades, différentes inventions culturelles ont été développées pour contourner les limitations de notre appareil perceptif. Le système décimal qu'incarne notre langue étiquette les quantités de manière exacte, et sans limite de taille. Les adultes semblent utiliser un format verbal pour encoder les nombres, dans les tâches arithmétiques requiérant une réponse exacte. De même pour la multiplication : dans ce cas, les sujets feraient appel à leurs tables de multiplications apprises par coeur, sous un format verbal. La soustraction, ainsi que, dans une moindre mesure, l'addition, sont résolues à l'aide d'autres systèmes cognitifs, probablement liés à la cognition spatiale.

Quel est la nature des liens entre la cognition numérique exacte, son développement, et le langage? Certains proposent que le langage (ou tout du moins, ce qu'on appelle la faculté de langage, cette disposition typiquement humaine à apprendre les langues) sous-tend entièrement l'apprentissage et le codage des nombres. Selon d'autres, au contraire, le langage ne serait qu'un outil offrant un accès à des symboles exacts (mais qui pourraient tout aussi bien être d'une autre nature, non-verbale), et permettant à une cognition numérique originellement approximative, d'étendre son champ de performance à des tâches exactes. Selon un troisième courant de pensée, enfin, le langage et les représentations numériques nonverbales interagissent au moment où l'enfant apprend à compter, et ces deux systèmes sont indispensables à l'acquisition de certains concepts mathématiques. En établissant des associations entre les mots et ses représentations non-verbales, l'enfant commence par apprendre à quelle numérosité réfèrent les nombres 1, 2, 3. Au moment où il comprend que toute la suite des nombres est générée par applications successives de la fonction successeur, par extension par rapport à ce qu'il a observé sur les petits nombres, il réalise soudainement que tous les noms de nombres réfèrent à des quantités exactes, et que la procédure du comptage sert à construire des ensembles d'une certaine numérosité. Avec les données dont nous disposons aujourd'hui, il n'est pas possible de savoir si les enfants ont déjà compris que les quantités sont dissociables à l'unité près avant de déchiffrer la structure de la suite des nombres.

Chapitre 10

Cognition numérique chez les Mundurucús

10.1 Introduction¹

Comme nous l'avons vu, une grande partie de la cognition numérique repose sur des systèmes nonverbaux, et à ce titre, doit être indépendante du langage. Les animaux, les bébés bien avant de prononcer leurs premiers mots, se révèlent capables de représenter la numérosité des ensembles, de l'utiliser pour résoudre un certain nombre de tâches [Xu and Spelke, 2000], et même de réaliser des opérations arithmétiques sur la numérosité [McCrink and Wynn, 2004]. Pour les grands nombres, les représentations non-verbales de quantité sont approximatives, c'est-à-dire que des numérosités proches sont difficilement discriminées (nous donnons dans le chapitre 4 un modèle quantitatif qui décrit le niveau d'imprécision des représentations numériques). Dans le domaine des petits nombres, deux systèmes non-verbaux sont disponibles : le système de représentations approximatives s'étend aux petites numérosités en gagnant en précision; d'autre part un ensemble grandissant de données a mis en évidence l'existence d'un autre système, le systèmes des pointeurs attentionnels (object files), qui permet de représenter de manière exacte les numérosités comprises entre 1 et 4 [Feigenson et al., 2004].

Chez l'adulte, certaines tâches numériques semblent engager des codes verbaux (voir à ce sujet le chapitre 9): par exemple, on observe souvent des troubles en calcul mental, particulièrement en multiplication, chez des patients aphasiques [Lemer et al., 2003]. Par ailleurs, lorsqu'on demande à des bilingues de restituer le résultat d'additions exactes, ils sont ralentis si la langue de restitution diffère de la langue d'apprentissage (ce n'est pas le cas si on ne leur demande que d'estimer un résultat approximatif pour ces additions) [Spelke and Tsivkin, 2001]. Ces observations ont reçu le support de données d'imagerie cérébrale, grâce à laquelle on a pu décèler l'activation d'aires impliquées dans le traitement du langage pour une tâche d'ad-

¹Une partie de ce chapitre a été publiée sous la référence : [Pica et al., 2004]. Le reste fait l'objet d'un article en cours de préparation.

Ce projet n'aurait pas été possible sans l'aide de Ana Arnor, Pierre Pica, Venacio Poxô, André Ramo, André Tawe, Celso Tawe et Felix Tawe. Ce travail est développé à partir de données obtenues dans le cadre d'un projet sur la nature de la quantification et des catégories fonctionnelles développé à par la section linguistique du Département d'Anthropologie du Musée National de Rio et par l'Unité Mixte de Recherche 7023 du CNRS (Pierre Pica) en accord avec la Funaï et du CNPQ. Ces travaux ont été financés par l'INSERM, le CNRS, le NIH, et une dotation de la fondation McDonnell attribuée à Stanislas Dehaene.

dition exacte (et pas pour une addition approximative) [Dehaene et al., 1999]. Cependant, ces observations réalisées chez l'adulte ne permettent pas d'aborder la question cruciale du rôle du langage dans le développement des compétences numériques. On recense en particulier quelques cas frappants d'autistes qui ont réussi à développer des compétences arithmétiques complexes en l'absence de langage élaboré [Butterworth, 1999]; par ailleurs, chez certains patients la manipulation de la syntaxe de la langue peut être sévèrement endommagée sans que les règles de syntaxe mathématiques ne soit perturbées [Varley et al., 2005]. Le langage est-il nécessaire pour développer les concepts numériques? Si oui, quels sont les aspects de cette faculté composite qu'est le langage qui jouent un rôle crucial dans le développement?

Le problème que nous venons d'énoncer applique au domaine de la cognition numérique la question de l'hypothèse de Sapir-Whorf. Plusieurs déclinaisons de l'idée originelle de Whorf ont été présentées. Dans sa version la plus engagée, l'hypothèse de Whorf affirme que la langue que nous parlons détermine notre pensée, jusqu'à influencer les perceptions. Cette hypothèse a été largement débattue dans le domaine de la perception des couleurs : en effet, si le lexique des noms de couleur semble soumis à des variations extrêmes entre les différentes langues, Berlin et Kay ont montré dans un livre qui, encore aujourd'hui, fait référence [Berlin and Kay, 1969], que sous cette apparente diversité se cachaient de très grandes régularités. Le domaine des couleurs ne serait donc pas un très bon terrain de test pour l'hypothèse radicale de Sapir-Whorf, car les catégories linguistiques reflèteraient en fait des catégories perceptives universelles. Une série de travaux récents apportent aujourd'hui quelques nuances à cette première observation : alors que Berlin et Kay s'étaient focalisés sur les meilleurs exemplaires de chaque catégorie linguistique, Davidoff, Davies et Roberson étudient la position des frontières entre catégories, lesquelles ne semblent devoir reposer que sur une convention arbitraire [Davidoff et al., 1999]. Cependant, la question de savoir si ces catégories linguistiques influencent le traitement des couleurs au niveau perceptif reste ouverte. Les défenseurs d'une version plus nuancée de l'hypothèse de Whorf soutiennent aujourd'hui que la langue pourrait servir d'élément déclencheur au développement de certains concepts. C'est ce qu'écrit Carey au sujet de la cognition numérique, dans sa théorie du bootstrapping : selon elle, il faut à l'enfant accumuler une certaine expérience des mots numériques (en particulier via la pratique du comptage) afin de développer le concept de nombre exact.

La théorie de Carey s'appuie sur un ensemble de données que l'on doit à Wynn [Wynn, 1990]. Celleci montre qu'à l'âge de 3 ans 1/2, le comportement de l'enfant avec les nombres change radicalement. Avant cet âge, l'enfant pratique le comptage comme une routine, à laquelle il ne semble pas accorder une grande signification : lorsqu'on lui demande de produire un ensemble contenant un nombre précis d'objets, il se saisit d'une poignée de jouets sans les compter. Ce n'est qu'à 3 ans 1/2 que l'enfant comprend le principe de cardinalité [Gelman and Gallistel, 1978], c'est-à-dire que lorsqu'on compte, le dernier nombre énoncé représente le cardinal de l'ensemble à dénombrer. Comment a lieu cet apprentissage? Selon Carey, en observant les contextes dans lesquels sont employés les numéraux, l'enfant parvient à faire correspondre les numéraux avec les représentations exactes issues de son système de pointeurs : de ce fait, il comprend la structure de la suite des numéraux (chacun d'entre eux est obtenu en ajoutant 1 au précédent), qu'il généralise des petites aux grandes numérosités. Il en déduit que tous les numéraux représentent des quantités

10.1. INTRODUCTION 215

exactes, et que le comptage fournit justement une méthode fiable pour parvenir à cette quantité exacte. La théorie de Carey fait donc intervenir les numéraux au centre du développement du concept de nombre exact. Selon elle, avant que l'enfant ait compris la structure de la liste des numéraux, il ne peut pas possèder un concept de grand nombre exact.

Poser empiriquement la question de la relation entre l'arithmétique et le langage est particulièrement difficile. Nous avons cité les quelques études de cas d'autistes chez qui le dysfonctionnement du langage n'empêche d'acquiérir les compétences pour l'arithmétique, même exacte. Mais en dernière analyse, le débat ne peut se régler par l'étude de personnes qui ont été élevées dans une culture fourmillant de symboles écrits et parlés pour les nombres. Nous aurions besoin, pour le résoudre, d'une expérience de privation du langage où des adultes neurologiquement normaux auraient été élevés sans mots ni symboles pour les nombres. Alors qu'une telle expérimentation naturellement est éthiquement impossible dans notre culture occidentale, certaines langues sont intrinsèquement limitées dans leur capacité d'exprimer les nombres, utilisant parfois un ensemble très restreint de numéraux (un, deux, beaucoup). Ces langues, qui sont souvent en voie de disparition, offrent une occasion rare d'établir l'ampleur et les limites des capacités arithmétiques non-verbales. Nous avons étudié la cognition numérique de locuteurs natifs du mundurucú, une langue qui n'a de noms que pour les nombres de un à cinq [Strömer, 1932, Crofts, 1985]. Le mundurucú est une langue de la famille tupi parlée par quelque 7000 locuteurs qui vivent dans un territoire autonome de l'Etat de Para au Brésil (cf figure 10.1). A la suite de séjours de recherche réguliers depuis 1988, et de deux études pilote en 2001 et 2002, Pierre Pica, linguiste, a parcouru plusieurs villages au cours de deux voyages d'étude en 2003 et 2004, et réussi à chaque fois à récolter des données auprès d'une cinquantaine de locuteurs du mundurucú sur une batterie de tests informatisés.

Notons à ce point de l'exposition de nos recherches que les Mundurucús possèdent évidemment ce que Chomsky nomme la faculté de langage [Hauser et al., 2002], en particulier la récursion, qu'il situe à l'origine du développement de l'arithmétique. La faculté de récursion nous permet d'appréhender des ensembles d'objets définis pas à pas, selon des règles qui décrivent comment construire des objets plus complexes à partir d'objets déjà construits. La grammaire des langages naturels est un exemple d'ensemble défini récursivement (par exemple selon une règle de la grammaire française, on peut définir un groupe nominal valide en insérant un adjectif supplémentaire dans un groupe nominal valide, on crée ainsi le groupe le petit prince à partir du groupe le prince, le groupe le petit prince charmant à partir de le petit prince, etc); l'ensemble des nombres entiers en est un autre (où on construit le successeur de chaque nombre en lui ajoutant 1). En l'absence de la récursion selon Chomsky, l'arithmétique ne pourrait pas émerger. Nos observations sur des locuteurs du mundurucú, dont le lexique est limité, mais qui possèdent toutes les systèmes cognitifs nécessaires au développement du langage, ne permettront pas d'invalider la thèse de Chomsky.

Les expériences exposées ci-dessous posent trois ensembles de questions :

1. Les Mundurucús possèdent-ils un sens des nombres semblable au nôtre : forment-ils des représentations approximatives des quantités numériques? Quelles sont les propriétés fonctionnelles de ces représentations : peuvent-ils leur appliquer des opérations telles que l'addition, la soustraction? Enfin, voit-on

- apparaître chez les Mundurucús les mêmes comportements caractéristiques que chez les petits singes et les enfants préverbaux, qui traitent différemment les petits nombres?
- 2. Avoir un lexique numérique étendu est-il nécessaire au développement du concept d'égalité exacte, ou de nombre exact? En d'autres mots, est-ce qu'en l'absence de noms pour les grands nombres, ceux-ci ne sont représentés, manipulés, que comme des quantités approximatives? Ou les Mundurucús comprennent-ils que, même s'il ne peuvent pas discriminer ces deux quantités, on obtient un nombre différent en ajoutant ne serait-ce qu'1 item?
- 3. Quelle signification les Mundurucús attribuent-ils aux numéraux de leur langue, ainsi qu'aux numéraux portugais? En particulier, nous nous intéressons ci-dessous à deux aspects orthogonaux de la signification des mots numériques : 1. le sens de ces mots est-il exact ou approximatif, réfèrent-ils à une numérosité précise ou à toute une gamme de numérosités? 2. à quelle(s) valeur(s) de numérosité ces numéraux réfèrent-ils?

10.2 Méthodes générales

10.2.1 Participants

Après plusieurs voyages pilotes, Pierre Pica a entrepris deux voyages d'études au Brésil, en 2004 et en 2005. Il a parcouru le territoire des Mundurucús en s'arrêtant dans plusieurs villages. Les participants étaient recrutés sur place, et les tests étaient administrés par un membre du village, sous la supervision de Pierre. Comme la majorité des groupes indigènes vivant au Brésil, les Mundurucús ont un territoire autonome où ils vivent isolés mais entretiennent quelques contacts avec des occidentaux, principalement des institutions gouvernementales et des missionnaires. Plusieurs parlent donc plus ou moins bien portugais, et quelques uns, les enfants en particulier, reçoivent une instruction élémentaire à l'école (géographie, histoire, arithmétique de base, etc). En principe, comme dans toutes les populations indigènes, tous les enfants âgés de 5 à 10 ans doivent aller à l'école où ils suivent des cours en mundurucú, puis de 10 à 14 ans, ils continuent à recevoir de l'instruction en portugais. En pratique, tous ne vont pas à l'école, et les cours sont souvent rudimentaires, assurés par de jeunes professeurs de la communauté. De plus, le contenu des cours varie considérablement d'un village à l'autre. Il existe également quelques cours qui s'adressent aux adultes, et qui sont donnés soit en mundurucú soit en portugais.

Le niveau de bilinguisme est également variable. En général, les personnes âgées, les femmes, et les jeunes enfants sont monolingues. Les autres ont quelques notions de portugais, souvent rudimentaires, mais on trouve aussi de très bons bilingues. Sur le plan des nombres, beaucoup d'Indiens connaissent la séquence des nombres en portugais, même parmi les monolingues, mais ceux-ci ne semblent pas l'utiliser dans la vie courante. Dans les villages, l'argent n'est utilisé que très rarement. Certains Indiens, les plus âgés, reçoivent une pension du gouvernement. Nous n'avons pas étudié systématiquement comment les Mundurucús parviennent à manipuler l'argent, mais avons l'impression qu'ils utilisent plutôt l'estimation, ou la répétition de plusieurs additions, que des procédures arithmétiques complexes. Notamment, l'un d'entre eux, questionné sur ses achats de

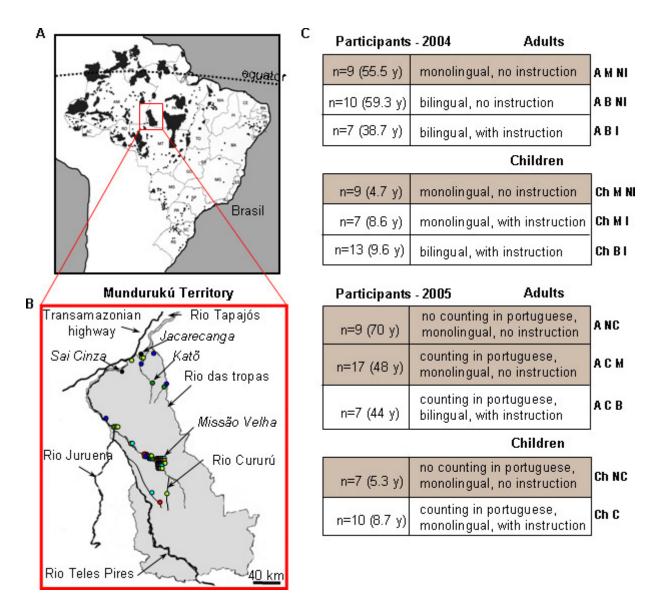


FIG. 10.1 – A. Localisation des territoires indigènes au Brésil. B. Territoire principal des Mundurucús, sur lequel ont été conduites nos recherches. Les points indiquent les villages où les participants ont été testés en 2004. Reproduits depuis [Pica et al., 2004]. C. Tableau récapitulatif des participants et de leur répartition en différents groupes en 2004 et 2005.

pains, a rapporté ne jamais acheter un pain, mais toujours systématiquement cinq d'un coup. Il disait ne pas être "assez riche pour acheter seulement un pain" : le prix de 5 pains correspond en effet justement à un billet de 10 réals, et il ne pouvait pas se permettre de n'utiliser que partiellement son billet.

Dans ce contexte de variations culturelles, et comme notre but était d'évaluer les compétences arithmétiques chez des individus natifs du Mundurucú, n'ayant reçu aucune éducation sur des domaines touchant à la culture occidentale, nous nous sommes concentrés sur des groupes d'individus dont nous pouvions affirmer qu'ils étaient monolingues et qu'ils n'étaient pas allés à l'école. Lors du premier voyage en 2004, cela a été établi suivant les dires des Indiens eux-mêmes; mais pour affiner nos critères, au cours du deuxième voyage en 2005 nous avons demandé en plus à tous les participants de compter en mundurucú et en portugais. La classification des participants en bilingues et monolingues a été établie en prenant soin de placer tous ceux qui montraient une compétence de la langue portugaise (autre que le comptage), si faible soit-elle, dans le groupe des bilingues. De même, tous ceux qui ont été à l'école à un moment ou à un autre, même pour une période très courte, ont été placés dans le groupe des participants instruits. Ces étiquettes, cependant, ne doivent pas masquer la réalité, qui est que les niveaux de bilinguisme et d'instruction sont souvent modestes et très variables.

En 2004, nous avons réparti les sujets en 6 groupes, selon leur niveau de bilinguisme et d'instruction. Deux groupes d'enfants et d'adultes étaient complètement monolingues et n'avaient reçu aucune instruction (adultes : n=9, âge moyen = 55.5 ans ; enfants : n=9, âge moyen = 4.7 ans). Parmi les adultes, nous avions également deux groupes de sujets 'bilingues', c'est-à-dire ayant quelques notions de portugais, certains n'ayant reçu aucune instruction (n=10, âge moyen = 59.3 ans), d'autres ayant été à l'école (n=7, âge moyen = 38.7 ans). Parmi les enfants plus âgés, qui allaient ou étaient allés à l'école, nous avons également pu définir deux autres groupes, l'un avec des enfants strictement monolingues (n=7, âge moyen = 8.6 ans), les autres ayant quelques notions de portugais (n=13, âge moyen = 9.6 ans). La répartition géographique des participants ainsi qu'un résumé des effectifs sont visibles sur la figure 10.1. Tous ces sujets ont passé tout ou partie des tests suivants : dénomination de quantités (expérience 1), comparaison de numérosités (expérience 2a), addition et comparaison de numérosités (expérience 2b), soustraction exacte avec réponse verbale ou nonverbale (expérience 4a). Nous reprendrons ci-dessous la description détaillée des tests. Enfin, pour ces tests, nous avons recueilli des données contrôles auprès de 10 sujets français (âge moyen = 55 ans).

En 2005, nous avons demandé aux sujets de réciter la liste des numéraux en mundurucú et en portugais pour appréhender leur niveau de bilinguisme dans le domaine des nombres. Nous avons ainsi pu affiner la classification des sujets, et avons de ce fait considéré 5 groupes : deux groupes de sujets monolingues, non instruits, et ne connaissant pas la liste des numéraux en portugais (adultes : n=9, âge moyen = 70 ans; enfants : n=7, âge moyen = 5.3 ans). Chez les adultes, nous avons défini un autre groupe où les participants savaient réciter les numéraux portugais, mais ne montraient aucune autre compétence de cette langue (n=17, âge moyen = 48 ans). Ceux-ci n'ont en général pas été scolarisés, à une exception près. Nous avons formé un quatrième groupe de sujets adultes possédant quelques notions en portugais, en plus de savoir compter (n=7, âge moyen = 44 ans), mais comme les effectifs étaient trop faibles, il n'a pas été possible de diviser encore

ce dernier groupe entre les sujets ayant été scolarisés (n=4) et ceux n'étant jamais allés à l'école (n=3). Enfin, chez les enfants, tous ceux qui savaient réciter la liste des numéraux portugais étaient monolingues à 2 exceptions près, et scolarisés à deux autres exceptions près (cinquième groupe : n=10, âge moyen 8.7). Lors du voyage de 2005, les tests proposés aux sujets étaient les suivants : test non-verbal du concept de grand nombre exact (expérience 4b), test sur la précision du sens attribué aux numéraux en mundurucú et en portugais (expérience 5a), test sur l'association entre mots et quantités (expérience 5b), test de comparaison de grandes et petites numérosités en présentation simultanée ou sérielle (expérience 3). Tous les sujets n'ayant pas systématiquement participé à tous les tests, nous avons été amenés à remanier les groupes au moment des analyses afin de travailler sur des effectifs suffisants.

Pour ce deuxième voyage, les résultats que nous présentons ci-dessous sont encore à l'état d'ébauche. Dans plusieurs cas, les effectifs sont encore très réduits et la puissance statistique de nos tests s'en ressent. Certains tests présentent de plus quelques faiblesses à corriger. Le travail sera complété au cours des missions ultérieures de Pierre Pica en Amazonie. Néanmoins, le tableau qui se dégage de nos premières données est assez éloquent pour que nous souhaitions le décrire ici.

10.2.2 Procédure

Les instructions étaient toujours données en mundurucú par un locuteur natif, entraîné au prélable à la passation des tests, et sous la supervision de Pierre Pica. Les stimuli étaient présentés sur l'écran d'un ordinateur portable alimenté par une batterie à chargeurs solaires, à l'aide des logiciels PsyScope (test de comparaison), Powerpoint (addition et comparaison de grandes numérosités, soustraction exacte avec réponse verbale ou non-verbale), ou directement implémantés en Java (voyage 2005). Pour les tests de dénomination de quantité et de comparaison (voyage 2004), occasionnellement les stimuli étaient présentés sur des feuilles de papier, à raison d'un stimulus par page.

10.3 Expérience 1 : dénomination de nuages de points (2004)

Dans cette première tâche, nous explorons le lexique numérique de la langue mundurucú. On présentait aux participants des tableaux de 1 à 15 points, dans un ordre aléatoire, et on leur demandait dans leur langue de dire combien de points il y avait. Cette tâche a permis une analyse objective des conditions d'utilisation des numéraux. Chaque numérosité comprise entre 1 et 15 était en fait présentée deux fois. Afin de nous assurer que les participants répondaient sur la base de la numérosité et non de quelque autre variable de bas niveau, nous avions généré deux séries de 15 nuages avec différents contrôles sur les paramètres continus : dans la première série, les variables extensives (luminance totale et espace total occupé) étaient égalisées pour toutes les numérosités ; dans la deuxième série au contraire, nous avions égalisé les variables intensives (taille des points et espacement entre les points).

Aucune variation systématique entre groupes n'a été relevée, hormis l'absence d'usage du mot pour "'cinq" chez les plus jeunes, et les résultats ont donc été mis en commun pour tous les groupes (figure 10.2).

Ces résultats confirment que le mundurucú n'a d'expression figée que pour les nombres 1-5. Ces expressions sont longues, et possèdent souvent autant de syllabes que les quantités correspondantes. Les mots pour trois et quatre sont polymorphémiques : $ebap\tilde{u}g=2+1$, ebadipdip=2+1+1, où eba signifie "'vos deux bras"'. Ceci reflète peut-être un système antérieur en base 2, commun aux langues tupi, mais le système n'est pas productif en mundurucú : des expressions telles que ebaebadip ou $ebaebaebap\tilde{u}g$ ne sont pas utilisées et jugées sans signification.

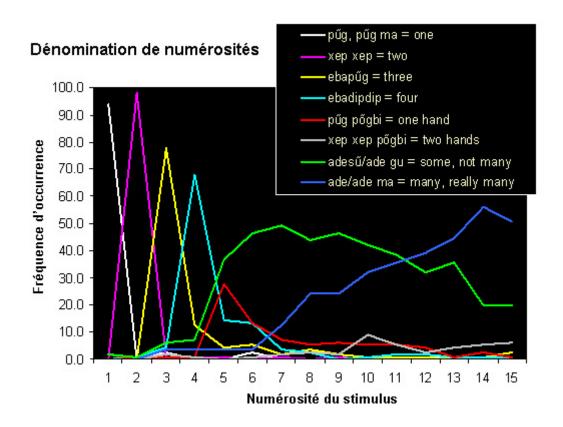


FIG. 10.2 — Dénomination des numérosités en mundurucú (2004). Les participants devaient décrire des ensembles contenant entre 1 et 15 points. Le graphique montre la fréquence d'occurence d'une série de mots et locutions en réponse aux ensembles d'une numérosité donnée. Nous ne présentons les données que pour les réponses qui représentaient plus de 2.5% du total des essais. Pour les numérosités supérieures à 5, la somme des fréquences d'occurence n'atteint pas 100%, car beaucoup de participants produisaient des expressions rares voire idiosyncratiques comme "tous mes orteils".

Au-dessus de 5, il y avait peu de cohérence entre les différentes réponses, aucun mot ou expression ne représentant plus de 30% des productions pour une numérosité donnée. Les participants s'en remettaient à des quantificateurs approximatifs tels que peu (adesũ), beaucoup (ade), ou une certaine quantité (bũrũ maku). Ils employaient aussi une large diversité d'expressions, dont la précision apparente était variable, comme plus qu'une main, deux mains, quelques orteils, et même de longues phrases telles que tous les doigts des mains et encore quelques-un de plus (en réponse à 13 points).

De façon générale, les Mundurucús n'utilisent par leurs numéraux pour compter en séquences. Ils énonçaient une expression sans compter (bien que si on le leur demande, certains puissent compter très lentement et sans verbaliser en faisant correspondre leurs doigts et orteils aux ensembles de points). Nos mesures confirment qu'ils sélectionnaient leur réponse verbale sur la base d'une appréhension du nombre approximatif plutôt que d'un comptage exact. Avec l'exception de un et deux, tous les numéraux étaient employés en rapport avec une gamme de quantités approximatives plutôt qu'un nombre précis (voir figure 10.2). Par exemple, le mot pour cinq, qui peut se traduire comme une main, une poignée, était employé pour 5, mais aussi pour 6, 7, 8 ou 9 points. Inversement, lorsque 5 points étaient présentés, le mot pour cinq n'était prononcé que dans 28% des essais, tandis que les mots quatre et peu étaient utilisés chacun pour environ 15% des essais. Ce shéma de réponse est comparable à l'emploi de nombres arrondis dans les langues occidentales, par exemple lorsque nous disons dix personnes alors qu'il y en a en réalité 8 ou 12. Nous avons aussi remarqué l'emploi occasionnel de constructions formées de deux nombres (par exemple deux-trois graines), constructions dont on a montré qu'elles permettent d'indiquer des quantités approximatives dans les langues occidentales [Pollmann and Jansen, 1996]. Ainsi, les Mundurucús semblent ne différer de nous que par le fait de ne pas parvenir à compter et d'autoriser une utilisation approximative des numéraux dans l'intervalle 3-5, où les numéraux occidentaux réfèrent habituellement à des quantités précises.

10.4 Expériences 2a et 2b : traitement des grandes numérosités (2004)

Si les Mundurucús ont un sens du nombre approximatif, ils devraient réussir des tâches d'arithmétique approximative avec des quantités plus grandes que celles pour lesquelles ils ont des numéraux. Si cependant les concepts de nombre n'émergent que lorsque des numéraux sont disponibles, alors on devrait s'attendre à ce que les Mundurucús aient beaucoup de difficultés avec les grands nombres. Nous étudions cette question à l'aide de deux tâches : comparaison de nuages de points, addition et comparaison de nuages de points.

10.4.1 Expérience 2a : comparaison

Méthode expérimentale

Tout d'abord, nous avons étudié la comparaison de nombres. A chaque essai, deux nuages étaient présentés simultanément l'un à côté de l'autre, celui de gauche en noir et celui de droite en rouge. Les participants devaient indiquer lequel contenait le plus de points. Dans la moitié des cas, le plus grand se situait à gauche, sinon il était à droite. Nous avions fait varier le ratio entre les deux numérosités à comparer, car ce ratio détermine le niveau de difficulté de la comparaison, du moins chez les sujets occidentaux (R=1.2, 1.3, 1.5 ou 2.0; 12 essais à chaque fois). Pour chaque valeur de R, nous utilisions trois paires de numérosités de taille différente (petites : 20-30 points; médium : 30-60 points; grandes 40-80 points). Pour la moitié des paires, la luminance totale et l'espace occupé étaient égalisés entre tous les stimuli, alors que pour l'autre moitié des paires, au contraire, la taille des points et leur écartement étaient maintenus constants.

Dans la plupart des cas, nous avons également recueilli des temps de réaction en millisecondes en demandant aux participants de répondre en appuyant sur deux boutons coloriés en rouge et en noir comme les stimuli. Certains participants qui refusaient d'utiliser les boutons ou n'arrivaient pas à appuyer dessus ont répondu en pointant simplement vers l'ensemble le plus numéreux. Au total, nous avons obtenu des réponses et des temps de réponse analysables respectivement chez 52 et 38 Mundurucús.

Résultats

Les réponses des participants mundurucús se situaient bien au-delà du niveau du hasard dans tous les groupes [le minimum était de 70.5% de réponses correctes pour le groupe le plus jeune; toutes valeurs de p < 0.0001]. Il n'y avait pas de différence significative entre les six groupes mundurucús [F(5,46)=1.50, p>0.20], ce qui suggère que le niveau de bilinguisme et d'instruction des participants ne modifiait pas leur performance. Cependant, la performance moyenne des Mundurucús était légèrement inférieure à celle du groupe de contrôle français, créant donc une différence entre groupes [F(6,55)=2.58, p<0.028]. Certains participants Mundurucús ont pu commettre des erreurs par distraction, surtout que le test de comparaison était le tout premier auquel ils participaient.

Chez les sujets occidentaux, la performance en comparaison numérique est sujette à un effet de distance : la performance augmente avec le rapport entre les nombres à comparer, que les stimuli soient présentés sous forme d'ensemble d'objets ou dans un format symbolique comme les chiffres arabes [Buckley and Gillman, 1974]. Nous avons observé un effet de distance classique chez les Mundurucús : leur performance diminuait lorsque le rapport entre les numérosités à comparer passait de 2 à 1.5, 1.3 ou 1.2 [F(3,138)=43.2, p<0.0001]. Cet effet était identique dans tous les groupes, y compris le groupe de contrôle français [interaction groupe.distance : F<1; voir figure 10.3 a]. Les temps de réponses aussi montraient un effet de distance : ils étaient plus rapides pour les nombres éloignés que pour les nombres proches [Mundurucús : F(3,90)=12.9, p<0.0001; Français : F(3,27)=4.93, p<0.008]. Ici encore, bien que le groupe de contrôle français était globalement plus rapide, créant ainsi un effet de groupe important [F(6,37)=4.59, p<0.002], l'effet de distance était similaire dans tous les groupes [interaction F<1]. Nous avons ajusté la courbe de performance sur les équations de notre modèle pour obtenir une estimation de la fraction de Weber interne w, paramètre qui quantifie le degré d'imprécision dans la représentation des nombres. La valeur obtenue était de 0.17 chez les Mundurucús, seulement marginalement supérieure à la valeur de 0.12 observée dans le groupe de contrôle, et égale par ailleurs à la valeur de 0.17 que nous obtenons dans nos tests psychophysiques (voir chapitre 5.1).

La performance en comparaison demeurait bien au-dessus du niveau du hasard si on séparait les essais où les paramètres intensifs (comme la taille des points) des deux nuages étaient égaux, des essais où les paramètres extensifs (luminance totale par exemple) étaient égaux. Les sujets n'ont donc pas basé leurs réponses uniquement sur un paramètre non numérique. Leur performance était cependant moins bonne pour les paires appariées sur les paramètres extensifs [88.3% de réponses correctes contres 76.3%, p<0.0001]. Nous ignorons l'origine de cet effet, mais il est vraisemblable que, comme les sujets occidentaux, les Mundurucús estiment les numérosités en calculant une valeur approchée, par exemple en divisant l'espace total occupé par l'espace moyen autour des objets, ce qui rend les estimations sujettes à divers biais [Allik and Tuulmets, 1991].

Ainsi, il est clair que les Mundurucús sont capables de se représenter des grands nombres. De plus, ils comprennent que ceux-ci sont ordonnés.

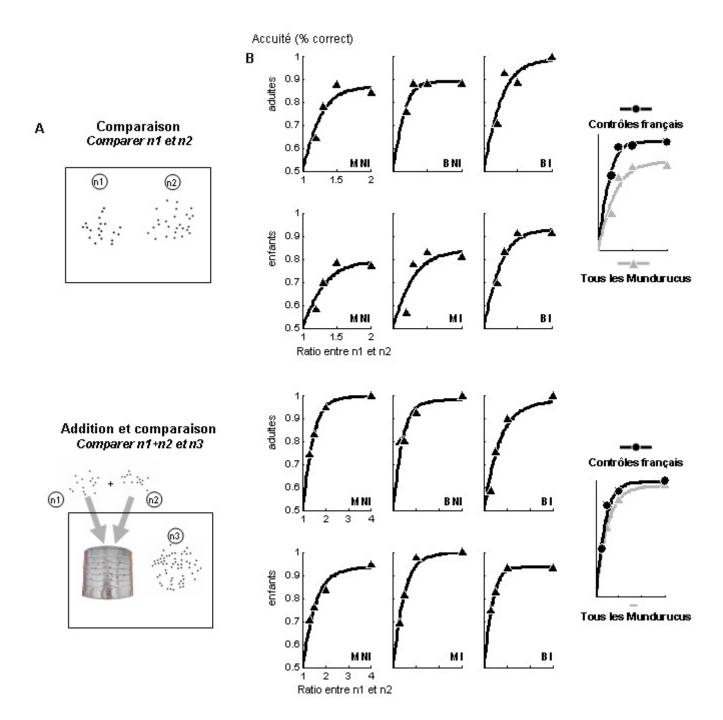


FIG. 10.3 – Performances dans deux tâches d'arithmétique approximative (comparaison, addition et comparaison) (2004). A. Déroulement d'un essai. B. taux de réponses correctes pour chaque groupe (M : monolingues, B : bilingues, NI : sans instruction, I : avec instruction), puis la moyenne de la performance de tous les Mundurucús comparée avec celle des français. Le bas de l'échelle correspond au niveau du hasard (50% de réponses correctes). La distance entre les nombres à comparer, mesurée en terme de ratio, détermine le niveau de performance.

10.4.2 Expérience 2b : addition et comparaison

Méthode expérimentale

Nous avons ensuite examiné si les Mundurucus sont capables d'effectuer des opérations approchées avec des grands nombres. Nous avons utilisé une version non-symbolique de la tâche d'addition approximative, dont on pense qu'elle est réalisée de manière non-verbale chez les occidentaux [Dehaene et al., 1999]. La tâche a été décrite plus haut dans le chapitre 5.1. A chaque essai, un film très court était joué pour illustrer un problème d'addition (cf figure 10.3 b). Au début, on montrait une boîte de conserve vide. La boîte revenait ensuite en position verticale, en sorte que le contenu en était caché, et deux nuages de points descendaient successivement du haut de l'écran pour tomber dans la boîte. Les deux nuages n'apparaissaient jamais simultanément, mais se suivaient immédiatement dans le temps (durée du mouvement de chaque nuage: 5 secondes; délai entre les deux ensembles : 0 secondes). Juste après, un troisième ensemble apparaissait à droite de la boîte. Les participants devaient indiquer si à l'issue de ces événements, il y avait plus de points dans la boîte ou hors de la boîte. Nous avons utilisé les mêmes procédures pour contrôler les paramètres non numériques que dans la tâche de comparaison. Pour manipuler la difficulté de la tâche, nous avons fait varier le ratio entre $n_1 + n_2$ et n_3 . Pour les trois premiers essais, ce ratio était de 4, après quoi des essais avec des ratios de 1.3, 1.5 et 2.0 étaient présentés en ordre aléatoire (16 essais pour chaque ratio). Les numérosités de la somme et de l'ensemble de référence étaient comprises entre 30 et 80, et les deux parties de la somme formaient entre elles un ratio de 2/1, 1/1 ou 1/2. Nous avons obtenu des données analysables chez 52 Mundurucús.

Résultats

Tous les groupes de participants, y compris les adultes monolingues et les enfants, avaient une performance nettement au-delà du niveau du hasard [minimum 80.7% correct, p<0.0001]. La performance n'était à nouveau affectée que par la distance [F(3,152)=78.2, p<0.0001], sans aucune différence entre les groupes ni aucune interaction groupe distance. La performance restait au-dessus du niveau du hasard pour les ensembles appariés sur les paramètres intensifs tant qu'extensifs [respectivement 89.5 et 81.8% de réponses correctes; les deux p<0.0001]. Bien que le niveau de performance ait été différent entre les deux séries de stimuli [p<0.0001], on retrouvait cette même différence chez les sujets mundurucús et français. De plus, les performances étaient significativement meilleures que le hasard pour une vaste majorité des problèmes posés (44/51), et n'était jamais significativement en-dessous du hasard, ce qui rend improbable que les participants aient utilisé un raccourci simple autre que l'addition mentale. Par exemple, ils n'ont pas pu simplement comparer n_1 avec n_3 ou n_2 avec n_3 , parce que lorsque n_1 et n_2 étaient tous les deux inférieurs à n_3 , ils distinguaient encore avec précision si leur somme était supérieure au nombre n_3 proposé, même si celui-ci différait de la somme de 30% seulement [respectivement 76.3 et 67.4% de réponses correctes pour les essais où $n_3 = 0.7*(n_1 + n_2)$ et $n_3 = 1.3*(n_1 + n_2)$; les deux valeurs de p<0.005].

La performance dans cette tâche d'addition et comparaison était plus élevée que dans la tâche de compa-

raison précédente, peut-être parce que l'opération y était représentée de façon plus concrète par le mouvement des objets et leur disparition, ou parce que les participants, qui venaient de réaliser plusieurs exercices, étaient plus habitués à nos méthodes au moment de la passation du test d'addition. Bref, les Mundurucús n'ont pas de difficulté à additionner et à comparer des grands nombres, avec une précision identique à celle du groupe de contrôle français.

10.4.3 Discussion expériences 2a et 2b

Avec des quantités approximatives, les Mundurucús n'ont pas un comportement qualitativement différent de celui du groupe de contrôle français. Ils sont capables de se former une représentation mentale de très grands nombres allant jusqu'à 80, bien au-delà de ce qu'ils peuvent nommer, et ils ne confondent pas les nombres avec d'autres variables telles que la taille ou la densité du nuage. Ils appliquent aussi spontanément les concepts d'addition, de soustraction et de comparaison à ces représentations approchées. Ceci se vérifie même pour les adultes monolingues et les jeunes enfants qui n'ont jamais appris aucune arithmétique formelle. Ces données s'ajoutent à un ensemble concordant de résultats selon lesquels l'approximation numérique est une compétence fondamentale, indépendante du langage et accessible même aux enfants au stade pré-verbal et à de nombreuses espèces animales.

Nous en concluons qu'une compétence numérique sophistiquée, bien qu'approximative, peut exister en l'absence d'un lexique de nombres bien développé. Ce résultat nuance de façon importante la version de l'hypothèse de Whorf que soutient Peter Gordon [Gordon, 2004], et selon laquelle seul le langage donne accès à la maîtrise du concept de nombre. Contrairement à cette hypothèse, les compétences numériques les plus fondamentales - celles qui nous permettent de comprendre ce qu'est le cardinal d'un ensemble d'objets, et comment ce cardinal se modifie ou non en fonction des opérations appliquées à l'ensemble - ne paraissent pas dépendre d'une expérience avec le langage.

10.5 Expérience 3 : comparaison d'ensembles cachés

Comme les jeunes enfants, les Mundurucús ne pratiquent pas le comptage. Or, selon la théorie du bootstrapping, c'est seulement lorsque les enfants accumulent de l'expérience avec les numéraux, en particulier via la pratique du comptage, qu'ils peuvent associer les noms des nombres avec les représentations issues de leur système de pointeurs attentionnels. Cette première étape est fondamentale : elle permet à l'enfant de découvrir ensuite la loi structurant la liste des nombres, à savoir que chaque nombre est obtenu systématiquement en ajoutant 1 à son prédécesseur. Ils découvrent également que chaque nombre est défini à l'unité près, et que le comptage permet de déterminer le nombre exact d'éléments dans un ensemble.

Ici, nous nous intéressons à l'établissement de liens d'un autre type, entre les différentes sortes de représentations numériques non-verbales. La théorie du *bootstrapping* ne se prononce pas sur cette étape du développement : la mise en correspondance des représentations approximatives de numérosité et des informations numériques issues du système de pointeurs attentionnels s'opère-t-elle avant ou après que l'enfant ait identifié la correspondance entre les numéraux et ses représentations numériques non-verbales? Chez des enfants très jeunes (10-12 mois), les données de Feigenson prouvent que les représentations numériques approximatives et de type pointeurs ne peuvent être comparées entre elles, ni traduites d'un format à l'autre. Une tâche symptomatique consiste à inciter les enfants à comparer le contenu de deux boîtes opaques, lorsque les objets contenus dans les boîtes ont été ajoutés un par un. De manière générale, dès qu'un des deux ensembles contient plus de 4 éléments, l'enfant échoue; il échoue même pour comparer 4 objets à un seul [Feigenson, 2005]. Ces résultats ont été interprétés en supposant que l'enfant construit une représentation de type pointeurs attentionnels lorsque les premiers objets apparaissent, mais qu'ils ne sont pas capables d'abandonner ce format de représentation au profit d'une représentation analogique de quantité quand les objets deviennent trop nombreux. Il se peut que l'acquisition du lexique numérique, ou la pratique du comptage, soit fondamentale pour réaliser ce type de manipulations. Les Mundurucús possèdent des numéraux pour les nombres 1 à 4, mais, pour certains d'entre eux au moins, ils ne pratiquent pas le comptage, ni dans leur langue maternelle, ni en portugais. Si les Mundurucús utilisent ces deux types de représentations numériques sans avoir construit de lien entre elles, on pourra observer chez eux le même effet de taille que chez les jeunes enfants : quand des éléments sont ajoutés un par un à un et que les totaux sont cachés, les Indiens ne seraient plus capables d'accéder à leur numérosité au-delà d'un certain nombre d'éléments (4).

Méthode expérimentale

Pour tester cette prédiction, nous avons utilisé un test de comparaison avec des ensembles cachés. Au début de chaque essai, on montrait deux boîtes de conserve vides. Puis un premier ensemble de points tombait dans la boîte de gauche; dès que celui-ci avait disparu, un deuxième ensemble tombait dans la boîte de droite. Selon l'essai, tous les points de chaque nuage apparaissaient simultanément (présentation simultanée), ou ils tombaient un à un dans la boîte (présentation séquentielle). Nous avons principalement utilisé des paires de numérosités séparées par un ratio de 1/2, mais en faisant varier la taille des nombres (petits nombres : paire 1/2; grands nombres : paire 6/12; nombres grands et petits mélangés : paire 3/6); chaque paire apparaissait 4 fois au cours du test, dans un ordre aléatoire. Typiquement, de jeunes enfants seraient incapables de comparer les paires 3/6 et 6/12 lorsque les ensembles sont présentés séquentiellement. Afin de vérifier les résultats de notre première expérience de comparaison, nous avons également utilisé des paires de nombres plus rapprochés pour avoir la possibilité d'observer un effet de distance (rapport entre les deux numérosités : $\frac{3}{3}$ (paire 1/2/18) et $\frac{3}{4}$ (paire 1/2/18). L'expérience commençait par deux essais d'entraînement sur la paire 1/4.

Afin de décourager les sujets d'utiliser les paramètres non-numériques pour formuler leur réponse, nous avons généré deux séries de stimuli en suivant les procédures de nos expériences précédentes : dans la première, les paramètres intensifs étaient égalisés entre toutes les numérosités, dans la deuxième série, nous avons égalisé les paramètres extensifs. Pour les essais à présentation séquentielle, nous avons réalisé le même type de contrôle sur les paramètres temporels de la séquence. Pour la moitié des essais séquentiels, le temps total de présentation était constant et donc la fréquence de chute des points augmentait avec le nombre; pour l'autre moitié, la fréquence de chute était constante et donc le temps total de présentation augmentait avec

la numérosité. Pour les essais à présentation simultanée, nous avons contrôlé le temps total de présentation en introduisant un délai entre la chute des deux ensembles, égal au temps que mettrait le plus numéreux des deux ensembles à tomber si on avait opté pour une présentation séquentielle. Nous avons obtenu des données analysables auprès de 47 participants Mundurucús, ce qui nous permit de distinguer 5 groupes : adultes monolingues ne sachant pas compter en portugais (8), adultes monolingues sachant compter en portugais (16), adultes bilingues sachant compter en portugais (6), enfants ne sachant pas compter en portugais (7), enfants sachant compter en portugais (10).

Résultats

Conformément aux résultats de notre première expérience de comparaison, les performances étaient meilleures quand les numérosités étaient distantes en terme de ratio [effet du facteur ratio à 4 niveaux $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4})$: F(3,125)=6.11, p=0.00065]; cet effet de distance était présent chez tous les groupes de participants [pas d'interaction entre le groupe et la distance : F<1]. Les participants sachant compter en portugais étaient meilleurs que ceux qui ne possédaient pas cette capacité, en particulier pour les essais présentés de manière séquentielle, entraînant un effet du groupe [F(4,41)=5.5, p=0.0013], et une interaction entre le groupe et le type de présentation [F(4,41)=4.20, p=0.0061]. Peut-être ces participants ont-ils utilisé le comptage lorsque les points tombaient un à un, bien qu'il n'aient pas semblé à Pierre qu'ils le fissent.

Nous nous sommes restreints alors pour la suite des analyses aux groupes de participants ne sachant pas compter (8 adultes et 7 enfants), dont le comportement sera plus critique. Afin de ne pas confondre les effets de tailles potentiel avec notre effet de distance, nous ne considérons maintenant que les essais où le ratio entre les deux numérosités est de 2 (paires 1/2, 3/6 et 6/12). Si les Mundurucús se comportent de la même façon que les enfants, ils devraient échouer sur la paire 3/6 (certainement aussi sur la paire 6/12) lorsque les ensembles sont présentés séquentiellement. S'ils utilisent indifféremment leur sens approximatif des nombres pour répondre à ces essais, ils devraient avoir la même performance dans tous les cas. L'analyse révèle un effet du type de présentation à la limite de la significativité [taux de réponses correctes : 78% pour des stimuli présentés simultanément, 69% pour des stimuli présentés séquentiellement; F(1,13)=3.6, p=0.079 (voir figure 10.4). Ce résultat pourrait suggérer que comme les jeunes enfants, les mundurucús utilisent des représentations d'un format différent lorsque les ensembles sont présentés séquentiellement, et n'accèdent à leurs représentations approximatives que lorsque les ensembles sont présentés simultanément. Cependant, contrairement aux enfants de Feigenson qui répondent totalement au hasard pour des grands ensembles présentés séquentiellement, les mundurucus sont meilleurs que le niveau du hasard pour toutes les paires de numérosité présentées et quelle que soit le type de présentation [taux de réponses correctes compris entre 68 et 82%, toutes valeurs de p<0.05].

Discussion

Avant de tirer des conclusions fortes de ce test au sujet de la cognition numérique des Mundurucus, il faudrait augmenter l'effectif des groupes, et voir si les tendances que nous avons observées sont confirmées.

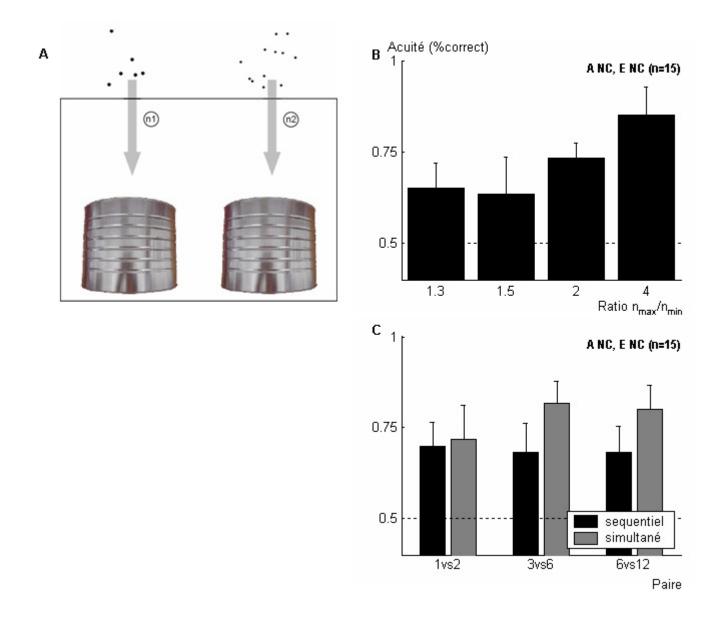


Fig. 10.4 – Tâche de comparaison de numérosités cachées (2005). A. Déroulement d'un essai : deux nuages de points tombent successivement dans les boîtes de gauche et de droite. Selon les essais, tous les élements de chaque ensemble tombent simultanément ou sont présentés séquentiellement. B. Performance des participants ne sachant pas compter (adultes et enfants; A : adultes, E : enfants, NC : ne sachant pas compter) pour différentes valeurs du ratio $\frac{n_{max}}{n_{min}}$: selon un effet de distance classique, plus ce ratio augmente, plus les performances s'améliorent. C. Performance des participants ne sachant pas compter en portugais (adultes et enfants), pour les 3 paires de numérosités séparées par un ratio $\frac{n_{max}}{n_{min}}$ de 2. Même si les participants se situent au-dessus du niveau du hasard dans tous les cas, les performances ont tendance à chuter pour les paires de taille moyenne et grande, lorsque les ensembles sont présentés séquentiellement (tendance non-significative).

Pour l'instant, chez les sujets ne pratiquant pas le comptage, nos données présentent une tendance nonsignificative, indiquant que les réponses des Mundurucús sont soumis à un effet de la taille des nombres :
dès lors que l'un des deux ensembles contient au moins 6 points, les sujets sont gênés pour une présentation
séquentielle par rapport à une présentation simultanée. Cet effet rappelle ce qu'on observe chez les jeunes
enfants occidentaux (10-12 mois), incapables de comparer deux ensembles qui ont été présentés séquentiellement dès lors que l'un des deux ensembles contient plus de 3 éléments. Cependant, contrairement à ces
enfants, les mundurucús se situent au-dessus du niveau du hasard dans toutes les conditions. Ces résultats
suggèrent que l'effet observé est de nature différente dans ces deux populations. Chez les enfants, il traduirait
l'impossibilité de passer d'une représentation sous forme de pointeurs attentionnels à une représentation de
type analogique. Chez les mundurucús, il semble plus plausible que l'effet observé reflète différents niveaux de
précision des représentations numériques pour des ensembles présentés simultanément et séquentiellement.

Avant d'adopter cette hypothèse, il faudrait réaliser une étude contrôle avec des sujets occidentaux, pour voir si eux aussi présentent des difficultés particulières avec des ensembles de points présentés séquentiellement. Jusqu'ici, une seule étude a comparé le niveau de précision des représentations numériques selon le mode de présentation des ensembles [Barth et al., 2003] : aucune différence n'a été trouvée entre les deux conditions. Cependant, il est possible que le rythme de présentation séquentielle influe sur la précision des représentations numériques : lorsque les éléments sont présentés très rapidement, on utiliserait un mécanisme du style du modèle de l'accumulateur proposé par Gallistel. Lorsque les éléments sont ajoutés un à un, lentement, un tel mécanisme ne serait plus fonctionnel et il faudrait effectuer des additions successives; le total estimé serait alors beaucoup moins précis que celui qu'aurait donné l'accumulateur avec un rythme de présentation plus rapide. L'ensemble de ces prédictions seront testées dans un futur proche à l'aide d'un test très semblable à celui que nous avons fait passer aux Mundurucú, où nous varierons en plus le rythme de présentation séquentielle afin d'étudier si la précision des représentations se détériore lorsque le rythme de présentation ralentit.

Si nous pouvons observer une dégradation des performances des adultes occidentaux pour des ensembles présentés séquentiellement, il sera fort vraisemblable que l'effet que nous observons chez les Mundurucús soit de la même nature que chez les adultes occidentaux, et fort différent de ce qu'on observe chez les enfants de 10-12 mois. Dans ce cas-là, nos données indiqueraient que les Mundurucús sont capables de relier entre eux différents formats de représentations numériques. En conséquence, la pratique du comptage ne serait pas nécessaire au développement de tels liens. Par contre les Mundurucús possèdent un lexique numérique pour les petits nombres, les seuls pour lesquels le système des pointeurs attentionnels est fonctionnel. Nous données ne permettent donc pas de remettre en cause le rôle du lexique dans l'acquisition des liens entre différents formats de représentations numériques non-verbales.

10.6 Expérience 4a et 4b : arithmétique exacte

10.6.1 Expérience 4a : soustraction exacte (2004)

Dans un troisième temps, nous avons examiné si les Mundurucús sont capables de manipuler des nombres exacts. L'hypothèse d'un "sens du nombre approximatif" prédit qu'en l'absence de symboles parlés ou écrits, un nombre ne peut être représenté qu'approximativement, avec une incertitude interne qui augmente avec le nombre (loi de Weber). Au-delà des nombres 3 ou 4, ce système ne peut distinguer de façon fiable un nombre exact n de son successeur n+1. Donc, s'ils ne disposent que de ce système non-verbal et imprécis pour représenter les nombres, les Mundurucús devraient échouer dans des tâches qui exigent la manipulation de nombres exacts (comme exactement six). Pour évaluer cette prédiction, nous nous sommes servis d'une tâche de soustraction exacte.

Méthode expérimentale

Comme la tâche d'addition approximative, cette tâche a été décrite dans le chapitre 5.1. A chaque essai, on commençait par montrer une boîte de conserve vide. Puis quelques points tombaient du haut de l'écran dans la boîte, et au bout d'un certain temps, quelques points tombaient de la boîte jusqu'en bas de l'écran (durée du mouvement de chaque nuage : 2 secondes ; délai entre les deux mouvements : 6 secondes ; voir figure 10.5). Dans l'expérience principale, les participants répondaient en indiquant le résultat correct parmi trois possibilités (0, 1 ou 2 points restants). Tous les problèmes de soustraction partant d'une numérosité entre 1 et 8 et dont le résultat est compris entre 0 et 2 étaient présentés une ou deux fois chacun, pour un total de 30 essais. Dans la deuxième version avec réponse verbale, les participants devaient décrire verbalement le contenu de la boîte à la fin de chaque film. Nous présentions tous les problèmes dont le premier opérande était compris entre 1 et 8 et le résultat entre 0 et 4. Chaque problème était montré une ou deux fois, pour un total de 43 essais. Le mot zéro n'existe pas en mundurucú mais les participants ont produit spontanément de courtes phrases comme il n'y a plus rien. Nous avons obtenu des données analysables chez 54 Mundurucús pour la version non-verbale, chez 51 d'entre eux pour la version verbale.

Pour la moitié des essais, l'espacement entre les points et l'espace total occupé sur l'écran augmentaient avec la numérosité, et ils variaient dans le sens inverse sur l'autre moitié des essais. La taille des points était tirée au hasard entre deux valeurs possibles à chaque essai. Pour la version non-verbale, les participants devaient choisir entre des vignettes représentant des ensembles de 0, 1 et 2 points dans une boîte : la taille de ces points pouvait être soit semblable soit différente de celle des points des nuages instanciant n_1 et n_2 .

Résultats

Dans les deux tâches, nous avons observé une baisse rapide des performances avec la taille du nombre initial [F(7,336)=44.9, p<0.0001; voir figure 10.5]. Cette baisse était significative pour tous les groupes de Mundurucús, bien qu'un effet de groupe significatif [F(5,48)=3.81, p=0.005] et une interaction groupe taille marginale [F(35,336)=1.40, p=0.07] indiquent que la performance était légèrement meilleure dans le groupe

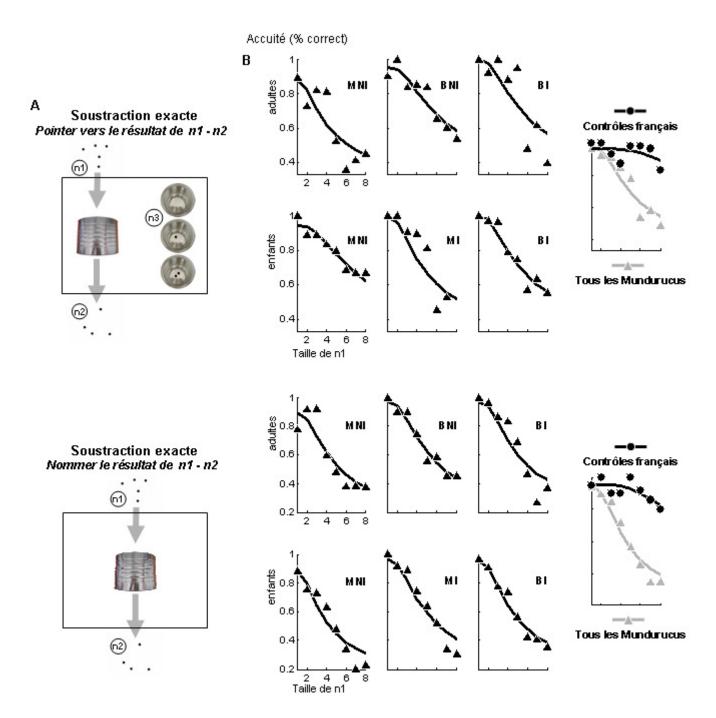


FIG. 10.5 – Tâches de soustraction exacte (2004). A. Déroulement d'un essai (versions non-verbale et verbale). B. Les six graphiques de gauche présentent le taux de réponses correctes pour chacun des 6 groupes (NI : sans instruction, I : avec instruction; M : monolingues, B : bilingues). Le bas de l'échelle correspond au niveau du hasard (33%). Sur le graphique de droite, les performances moyennées entre tous les participants sont comparées à celles du groupe de contrôle français. Chez les Mundurucús les performances dépendent de la taille du premier opérande n_1 . Chez les Français, le niveau reste quasiment stable quelle que soit la taille des nombres présentés.

le plus bilingue et instruit, surtout lorsqu'il y avait moins de 5 points (voir figure 10.5 d). Cependant, tous les groupes mundurucús avaient une performance nettement inférieure à celle du groupe de contrôle français, où la performance n'était que très légèrement affectée par la taille des nombres [F(7,63)=2.36, p<0.033]. Ainsi avons-nous observé un effet hautement significatif du groupe auquel appartenaient les participants [français vs mundurucú: F(1,62)=25.7, p<0.0001] et une interaction groupe.taille [F(7,434)=6.80, p<0.0001].

L'échec des Mundurucús à la soustraction exacte n'était pas dû à un malentendu sur les instructions, puisqu'ils montraient des performances supérieures au hasard et en fait proches du maximum lorsque le nombre initial était inférieur à 4. Leur succès avec les petits nombres pourrait refléter l'emploi d'un code verbal exact, ou d'un système d'individuation parallèle des objets, tel que celui qu'utilisent les enfants préverbaux et les petits singes. Lorsque la taille du nombre initial augmentait, les performances chutaient mais restaient meilleures que le hasard [par exemple, pour les essais de type 8-n:49.6% correct > niveau du hasard = 33.3%, p<0.0001]. Toute la courbe de performance sur l'intervalle 1-8 peut être modélisée à l'aide de notre modèle de représentation des numérosités sur la ligne numérique (voir le modèle pour la soustraction dans le chapitre 4). Ainsi les Mundurucûs ont-ils encore eu recours à des représentations approchées, sujettes à la loi de Weber, dans une tâche que le groupe de contrôle français résolvait facilement par calcul exact.

Discussion

Comme nous nous sommes intéressés aux Mundurucús, Peter Gordon s'est rendu chez les Pirahãs [Gordon, 2004], un peuple d'Amazonie dont le lexique numérique est encore plus réduit que celui des Mundurucús: ils ne disposent en effet que de numéraux que pour un, deux et beaucoup. Gordon a soumis quelques locuteurs de la langue pirahã à des tests de production de numérosité: ils devaient reproduire des ensembles d'objets, suivant des consignes de difficulté croissante, en sorte que l'ensemble produit ressemblait de moins en moins à l'ensemble modèle du point de vue des variables de bas niveau. Par exemple, dans un des derniers tests, Gordon montrait au participant un ensemble de cacahuètes, et celui devait en reproduire la numérosité à l'aide de piles électriques disposées parallèlement les unes aux autres. Sur l'ensemble de ces tâches, les Pirahãs se comportent de manière approximative, avec des réponses de plus en plus variables lorsque la numérosité de l'ensemble à reproduire augmente: c'est précisément le comportement qu'on attend d'un individu qui n'utiliserait que ses représentations non-verbales, approximatives de numérosité.

Ces résultats s'apparentent à nos données sur la tâche de soustraction exacte : nous y voyons que les Mundurucús ont continué de produire des réponses approximatives, même dans cette tâche où on exigeait un résultat exact. Peter Gordon conclut de ses données que les Pirahãs sont fondamentalement différents des occidentaux, dont la langue comporte un lexique numérique étendu : ils n'ont pas de concept de nombre exact, de l'égalité exacte entre deux ensembles. Selon lui donc, quand on demande aux indiens de juger si deux numérosités sont égales, ils répondent en jugeant de leur égalité approximative, parce que c'est le seul concept d'égalité dont ils disposent.

Nous préférons donner une autre explication, plus simple, de cet ensemble de données. Ce qui nous paraît manquer aux Mundurucús, c'est une procédure permettant l'appréhension rapide des nombres exacts au-delà

de 3 ou 4. La tâche de soustraction était somme toute assez difficile : il fallait accéder à la numérosité exacte des nuages de points en seulement 2 secondes (ce qui pour les contrôles français exigeait une grande attention quand il y avait 6 à 8 points), puis retenir cette valeur pendant toute la durée du délai (6 secondes), avant d'évaluer en moins de deux secondes la numérosité d'un deuxième nuage et d'effectuer la soustraction. Pour avoir une idée de la difficulté de la tâche, un exemple de stimulus est disponible sur le site du laboratoire à l'adresse http://www.unicog.org/main/pages.php?page=Numbers. Ces paramètres temporels que nous avons utilisés, et qui accroissent la difficulté de la tâche, n'ont malheureusement pu être choisis : ils nous étaient dictés par les contraintes du logiciel PowerPoint que nous utilisions pour présenter les stimuli. Or, les Mundurucús ne disposent pas d'une routine comme le comptage, qui permette d'appréhender la numérosité exacte en un temps très court. Bien que certains Indiens aient une capacité rudimentaire à compter sur les doigts, ils l'utilisent rarement. Ils auraient donc été limités pour la tâche de soustraction seulement par des facteurs exécutifs, sans que l'on puisse conclure de leur échec qu'ils ne possèdent pas de concept de nombre exact. De la même façon, les tâches de Gordon ont pu être très difficile pour des individus qui ne sont pas entraînés à compter : si nous possédons des routines pour nous assurer que tous les éléments ont été comptés, et chacun une seule fois (par exemple en considérant systématiquement les éléments à compter dans l'ordre de gauche à droite), un individu qui ne s'est pas entraîné à pratiquer le comptage et à qui ces stratégies font défaut risque d'être beaucoup moins précis.

A l'occasion du second voyage de Pierre en 2005, nous avons utilisé un deuxième test qui pose directement la question de la présence ou non d'un concept de nombre exact chez les Mundurucús. Ce test n'exige pas de réponse verbale, et à chaque essai la solution peut être trouvée sans avoir nécessairement à quantifier les ensembles : il suffit en fait de mettre en correspondance bijective leurs éléments respectifs.

10.6.2 Expérience 4b : égalité exacte entre deux ensembles (2005)

Avec notre expérience de soustraction, nous avons montré que les Mundurucús ne parviennent pas à résoudre une tâche d'arithmétique exacte, car ils continuent à utiliser leurs représentations approximatives de numérosité pour répondre. A partir de nos résultats et ceux de Gordon [Gordon, 2004], un débat a été lancé : cette limitation est-elle dûe à l'absence d'un concept de grand nombre exact et d'égalité exacte? L'échec des Indiens pourrait-il être expliqué par d'autres facteurs d'ordre exécutif, comme l'absence d'une procédure de comptage, ou d'une stratégie pour retenir une quantité exacte en mémoire de travail? Devrait-on s'en remettre à des facteurs culturels : dans la civilisation Mundurucú, lorsqu'on pose une question sur une quantité, la réponse attendue serait toujours approximative, et c'est pourquoi les Indiens auraient produit des réponses approximatives à nos tests? Nous présentons ici un test visant à départager ces explications. Nous cherchons à savoir si les Mundurucús sont capables de repérer que deux numérosité diffèrent d'une unité seulement, même lorsqu'il s'agit de deux numérosités élevées.

Chez les enfants, les seuls tests qui ont étudié la présence d'un concept de nombre exact font intervenir les numéraux de la langue [Sarnecka and Gelman, 2004, Lipton and Spelke, 2005]. Par exemple, dans un de leurs tests, Sarnecka et Gelman cachent des objets dans une boîte, en disant à l'enfant qu'elle en contient

cinq. Après avoir ajouté et/ou retiré un objet, elles demandent à l'enfant de choisir entre les mots cinq et six pour qualifier le contenu de la boîte. Ce genre de tests pose en fait deux questions simultanément : 1) l'enfant sait-il que toutes les numérosités, y compris les plus élevées, peuvent être définies à l'unité près ? 2) quel sens l'enfant attribue-t-il aux numéraux de la langue : un sens exact ou un sens approximatif ? Ici nous évitons toute intervention des numéraux de la langue afin de nous concentrer sur la première de ces deux questions.

Méthode expérimentale

Chaque essai se présentait sous la forme d'un film (voir figure 10.6 A). Au début, on présentait un certain nombre de pièces rouges accrochées à des socles noirs, et une boîte de conserve vide. Les pièces se détachaient ensuite de leur socle, et entraient dans la boîte. Durant toute la durée de l'essai, les socles restaient visibles. Tandis que les pièces rouges restaient dans la boîte, une transformation était appliquée au contenu de la boîte : une (ou plusieurs) pièce rouge était ajoutée, retirée ou remplacée. Puis un certain nombre de pièces ressortaient de la boîte, et s'accrochaient aux socles de droite. A ce moment de l'essai, soit il restait une (ou plusieurs) pièce dans la boîte, soit il n'en restait plus. Le sujet devait choisir entre ces deux alternatives, proposées sous forme de deux vignettes (boîte vide vs une (ou plusieurs) pièce dans la boîte). Le nombre de pièces au départ pouvait être un petit nombre (3), ou un grand nombre (9 ou 11). Certains essais, dont le nombre de départ était 11, étaient de type approximatif, c'est-à-dire que la transformation appliquée à l'ensemble impliquait 5 pièces et non une, et de même les réponses possibles étaient 0 ou 5. Sinon, tous les autres essais étaient de type exact : une pièce seulement était ajoutée, retirée ou remplacée, et les réponses possibles étaient 0 ou 1. Après avoir donné sa réponse, le sujet pouvait voir si elle était correcte ou pas. Nous avons vu que les Mundurucús savent effectuer des calculs exacts sur des petits nombres, et des calculs approchés sur des grands nombres, aussi devraient-ils réussir sans problème les essais sur les petits nombres et les essais approximatifs sur les grands nombres. La troisième condition, qui exige de distinguer deux grandes numérosités voisines, est cruciale. Contrairement à ce que nous avions fait dans les tests de soustraction, nous multiplions ici les indices visuels pour que la tâche soit réalisable sans qu'il soit besoin de quantifier les ensembles de manière exacte. Pour trouver la réponse, il suffit de suivre les évolutions d'un petit nombre d'objets. Les limitations de la précision de la perception de la numérosité pour les grands nombres n'affectent donc pas les performances. Si les Indiens savent que même les numérosités élevées sont exactes, ils seront capables de suivre les pièces et de faire correspondre les pièces rouges avec les socles noirs. Ils réussiront donc tous les essais, y compris les essais exacts avec des grands nombres. Si, par contre, ils ne pensent pas que les grandes numérosités sont exactes, si les seuls concepts de grands nombres dont ils disposent sont des concepts approximatifs, ils vont considérer que n et n+1 (ou n et n-1) sont deux numérosités équivalentes (beaucoup ou une douzaine), et répondront au hasard sur cette dernière condition.

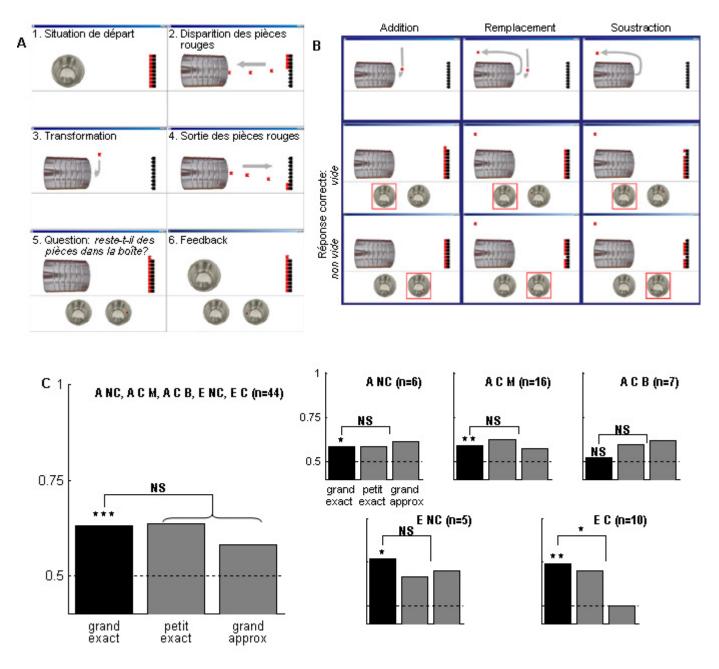


FIG. 10.6 – Test de jugement de l'égalité exacte entre deux ensembles (2005). A. Déroulement d'un essai. B. Exemples issus des différentes conditions possibles : la transformation effectuée peut être soit une addition, soit une soustraction, soit un remplacement, et à la fin de l'animation la boîte est vide ou non vide. Les exemples montrés ici sont issus de la condition avec des grandes numérosités et une transformation impliquant une seule pièce. C. Taux de réponses correctes moyenné chez tous les participants, pour les essais petits nombres exacts (3 pièces au départ, transformation impliquant 1 pièce), grands nombres exacts (9 ou 11 pièces au départ, transformation impliquant 1 pièce), grands nombres approximatifs (11 pièces au départ, transformation impliquant 5 pièces). En D., le même graphique est repris en séparant les données entre les différents groupes (A : adultes, E : enfants; C : sachant compter en portugais, NC : ne sachant pas compter; M : monolingues, B : bilingues). [*** : p<0.001, ** : p<0.01, * : p<0.05, NS : p>0.1]

Résultats

Nous avons obtenu des données auprès de 44 participants qui ont été répartis en 5 groupes (6 adultes monolingues ne sachant pas compter en portugais, 16 adultes monolingues sachant compter en portugais, 7 adultes connaissant mieux le portugais, 5 jeunes enfants ne sachant pas compter en portugais, 10 enfants sachant compter en portugais). De manière générale, les Mundurucús ont des performances équivalentes pour tous les types d'essais, qu'ils soient exacts, approximatifs, ou qu'ils portent sur des petits nombres (voir figure 10.6 C) [pas d'effet principal du type d'essai, p>0.12]. Dans la condition qui nous intéresse, c'est-à-dire les essais impliquant des grands nombres à distinguer de manière exacte, les performances sont meilleures que le hasard pour tous les groupes sauf pour les adultes "'bilingues" [entre 52% et 77% de réponses correctes; comparaison avec le niveau du hasard (50%) : adultes bilingues p=0.81, tous les autres groupes p<0.05]. Cependant, le fait d'avoir à considérer une égalité exacte entre deux grandes quantités n'apporte aucune difficulté supplémentaire à la tâche : en effet on ne voit aucune différence entre les performances pour les essais de grande numérosité exacte et les autres, sauf pour le groupe des enfants sachant compter, qui sont en fait meilleurs dans la condition grands nombres exacts [enfants sachant compter : test de Student apparié T(9)=2.5, p=0.035; pour tous les autres groupes p>0.11].

En résumé, lorsqu'on leur propose un test où le manque de précision de leurs représentations de numérosité n'est pas un facteur limitant, les Mundurucús sont capables de distinguer deux quantités, même si elles ne différent que d'une unité. Bien que les performances ne soient pas excellentes, tous les groupes réussissent ce test, hormi le groupe de bilingues qui semblent moins bons que les autres. En particulier, même les Mundurucús qui ne pratiquent pas le comptage, adultes et jeunes enfants, parviennent à juger de la stricte égalité entre la numérosité de l'ensemble test et celle de l'ensemble de référence.

Auraient-ils pu réaliser ces performances sans posséder pour autant un concept d'égalité exacte pour les grandes numérosités? Envisageons une première possibilité, selon laquelle les participants auraient simplement jugé de l'appariement des deux ensembles sur des bases perceptives, sans accéder à leur numérosité. A la fin de chaque essai, les pièces rouges et les socles noirs étaient accrochés, en sorte qu'on voyait rapidement s'il en manquait d'une sorte ou de l'autre, et, si une ou plusieurs pièces avaient été retirées de la boîte, elles restaient apparentes sur le coin gauche (voir figure 10.6 B). Pour les essais de type "'soustraction"' (une ou plusieurs pièces ont été retirées, mais aucune n'a été ajoutée), on pouvait parvenir à la réponse correcte simplement en faisant correspondre entre eux les différents éléments rouges et noirs présents sur l'écran à la fin de l'essai. Pour tous les autres essais ("'addition"' : ajout d'une ou plusieurs pièces; "'remplacement"' : retrait d'une ou plusieurs pièces, puis ajout du même nombre de pièces juste après), l'application de cette stratégie menait à une réponse erronnée. Or, les performances n'étaient pas meilleures sur les essais de type "'soustraction"' par rapport aux autres [F(1,39)=1.0]. Ceci est vrai chez tous les groupes, sauf pour le groupe des adultes bilingues qui au contraire étaient meilleurs lorsque la mise en correspondances des éléments présents sur l'écran menait à une réponse erronée [interaction avec le groupe : F(4,39)=3.4, p=0.019]. Les participants ont donc bien suivi l'ensemble des mouvements, et calculé leurs conséquences, pour formuler leur réponse.

Une deuxième possibilité serait que les participants soient parvenus à la réponse sans réaliser la fusion entre l'ensemble de départ, contenant de nombreuses pièces, et la ou les pièces impliquées dans la transformation. Par exemple, pour un essai de type grand nombre exact avec addition d'une pièce, une pièce était ajoutée à un ensemble de plusieurs pièces. Ils auraient alors formulé deux jugements en parallèle : d'une part la numérosité de l'ensemble qui sort de la boîte à la fin de l'essai leur aurait semblé approximativement égale à la numérosité de l'ensemble de départ ; d'autre part, ils auraient considéré un deuxième ensemble, ne contenant qu'une seule pièce, et dont la numérosité changeait au cours de l'essai, puisque cette pièce était absente au début de l'essai et n'apparaissait qu'au cours de la phase de transformation. Pour formuler ces deux jugements, il suffit d'avoir un concept d'égalité approximative entre deux ensembles. Au moment où la question est posée, le participant s'attendrait alors à ce qu'il reste une pièce dans la boîte, puisque celles de l'ensemble de départ lui sembleraient être toutes sorties. Il choisirait donc nécessairement la réponse où il reste une pièce dans la boîte. De même, pour un essai de type "'remplacement", il opterait pour la réponse où il ne reste rien dans la boîte, que toutes les pièces soient effectivement sorties ou pas. L'hypothèse envisagée ici prédit donc que nous observions une interaction entre les facteurs type d'action (addition ou remplacement) et réponse attendue (boîte vide ou non-vide), or ce n'est pas le cas [interaction: F(1,39)=0.087, p=0.77; triple interaction avec le groupe : F(4,39)=1.2, p=0.31]. Les participants n'ont donc pas utilisé cette stratégie de formulation de deux jugements en parallèle.

Les participants savaient-ils quelle était la valeur exacte de la numérosité de l'ensemble après transformation, ou se contentaient-ils d'attendre une numérosité supérieure, inférieure ou égale à la numérosité de départ? Dans la plupart des cas, il suffisait de savoir que les pièces rouges étaient plus nombreuses, moins nombreuses, ou en quantité égale par rapport aux pièces noires pour accéder à la réponse correcte. Cependant, dans une de nos conditions un tel jugement relatif n'était pas suffisant : il s'agit des essais de type "'soustraction"', où la boîte n'était pas entièrement vidée à la fin (voir figure 10.6 B). Nous partons d'un ensemble contenant n pièces. Au cours de la phase de transformation, une pièce est retirée de la boîte, puis n-2 pièces ressortent. Pour répondre qu'il reste une pièce dans la boîte, le participant doit savoir non seulement qu'il y avait moins de pièces qu'au départ dans la boîte, mais aussi qu'il y manquait exactement une pièce (et non deux). Il s'avère en fait que les performances sont meilleures sur ces essais que sur les autres essais de type grand nombre exact [F(1,39)=5.7, p=0.022]. Les sujets ont donc bien réussi à calculer la numérosité exacte des ensembles, en utilisant la correspondance bijective entre les pièces rouges et les pièces noires.

Discussion

Dans ce test, les Mundurucús se montrent capables de suivre l'évolution du cardinal d'un ensemble et à juger de son égalité exacte avec un ensemble de référence, même lorsque les numérosités impliquées sont élevées. Tous les participants testés parviennent à résoudre ce test, même ceux qui ne savent pas compter en portugais. Au contraire, les plus jeunes enfants, qui ne savent pas compter, s'avèrent être les plus performants (avec le groupe d'enfants plus âgés). Par ailleurs, les performances sur les essais requiérant de distinguer

deux numérosités voisines sont absolument comparables à celles que l'on enregistre pour des numérosités plus éloignées entre elles, ou pour des petits nombres : le fait d'avoir à juger de l'égalité *exacte* entre deux ensembles ne représente pas un effort supplémentaire pour les Mundurucús.

Ce test démontre qu'il est possible de développer un concept de numérosité exacte en l'absence de lexique numérique étendu, et sans pratiquer le comptage. Il falsifie la théorie du bootstrapping selon laquelle les enfants ne parviennent à concevoir que toute numérosité peut être définie de manière exacte que parce qu'ils ont réussi à comprendre la structure de la liste des numéraux. Cependant, si les Mundurucús possèdent un concept de nombre exact, il reste peu probable à nos yeux qu'ils possèdent des concepts pour chaque numérosité exacte particulière : certainement ils n'ont pas de concept pour exactement six, exactement neuf, etc.

Comment les résultats que nous obtenons chez les Mundurucús s'insérent-ils dans le tableau contradictoire des données acquises chez l'enfant de 2-3 ans ? Comme nous l'avons mentionné plus haut, la question qui a été abordée auprès des enfants jusqu'ici est assez différente, puisqu'il s'agit de savoir si les enfants attribuent un sens exact ou approximatif aux numéraux de la langue [Sarnecka and Gelman, 2004]. Cette question contient néanmoins celle que nous posons chez les Mundurucús, car si les enfants ne possèdaient pas le concept de la numérosité exacte, il est clair que le sens des numéraux ne pourrait être qu'approximatif chez eux. Sarnecka et Gelman réalisent deux expériences pour savoir si les enfants âgés de 2 ans et demi sont prêts à attribuer le même numéral à deux ensembles de numérosités voisines mais différentes et de manière surprenante, elles obtiennent des résultats différents à leurs deux tests. Il semble en fait que quand les deux ensembles à nommer sont visibles dans leur globalité, les enfants ont tendance à leur attribuer le même numéral, tandis que quand ces ensembles sont cachés, et qu'ils ont pu suivre les transformations qui ont été appliquées, les enfants leur attribuent des numéraux différents. Ainsi, la première expérience de Sarnecka et Gelman montre que les enfants cessent d'attribuer le même numéral à un ensemble d'objets cachés dans une boîte dès lors que l'expérimentateur a opéré une transformation sur le cardinal de cet ensemble. Leur deuxième expérience montre que les enfants associent le même cardinal à deux ensembles présentés devant eux, même si on s'assure qu'ils ont vu que les deux ensembles étaient différents. On retrouve la même distinction dans une expérience récente de Kondry et Spelke (communication personnelle) : leur tâche est semblable en tout point à la première expérience de Sarnecka et Gelman, sauf que les ensembles restent visibles, et dans ce cas les enfants continuent d'attribuer le même numéral même après transformation du cardinal. Tout se passe comme si ces enfants ne pouvaient pas inhiber leur système de représentations approximatives, qui leur indique que les deux ensembles sont similaires. Chez les Mundurucús, il se pourrait qu'on retrouve la même dichotomie. Nous avons réalisé un test où les ensembles sont cachés tandis que la transformation est appliquée, et nous voyons que les participants sont sensibles à de subtiles différences de numérosités. Dans ce contexte, il serait intéressant de réaliser un test en tous points semblable, sauf que les ensembles resteraient visibles tout du long. Si les Mundurucús se comportent de la même façon que les enfants, ils devraient échouer aux essais distinguant des grands nombres exacts dans cette variante.

10.7 Expériences 5a et 5b : signification des numéraux mundurucús et portugais

10.7.1 Expérience 5a : test sur la précision des numéraux

Ici, nous abordons la question qui a été posée chez les jeunes enfants occidentaux [Sarnecka and Gelman, 2004, Lipton and Spelke, 2005]: sachant que, dans les conditions de notre test précédent, les Mundurucús montrent qu'ils distinguent les quantités, même lorsque celles-ci ne diffèrent que d'une unité, quel sens attribuent-ils aux numéraux de leur langue? S'agit-il de numéraux approximatifs, à l'image de notre dizaine, qui s'appliquent à tout un intervalle de numérosités? Ou ces mots ont-ils au contraire un sens exact, comme notre vingt-trois, dont l'utilisation n'est correcte que si l'ensemble auquel on réfère possède exactement 23 éléments?

Méthode expérimentale

Notre test reprend le dessin expérimental de Lipton et Spelke, avec des transformations sur des ensembles cachés d'objets (voir figure 10.7 A): nous avons vu au cours du test précédent que dans cette situation, les Indiens sont sensibles à la différence entre deux quantités voisines. Au début de chaque essai, on montrait au sujet une boîte contenant un certain nombre de points, en lui disant combien il y en avait : par exemple, pour une boîte contenant 2 points, l'expérimentateur disait "voici une boîte contenant xepxep points". Puis, la boîte se mettait en position verticale (le contenu en était occulté), et une transformation était appliquée à son contenu : soit un point était ajouté ou retiré, soit plusieurs points (la moitié de la quantité initiale) étaient ajoutés ou retirés, soit un point était remplacé par un autre point d'une autre couleur. A l'issue de la transformation, on demandait au sujet si selon lui, on pouvait dire qu'il restait toujours xepxep dans la boîte. Nous avons effectué ce test sur un ensemble de mots en mundurucú et en portugais (en mundurucú : pūg ma (1), xepxep (2), ebadipdip (4), pūg pogbi xepxep bodi (7 - expression peu usitée), pūg pogbi ebadipdip bodi (9 - non observée dans notre corpus, formée à partir de règles syntaxiques supposées), xepxep pogbi (10), quantifieurs ade gū (peu), ade ma (beaucoup); en portugais : um (1), quatro (4), nove (9), dez (10), vinte sete (27), quarenta (40)). Les sujets ont généralement passé la version en langue mundurucú, à la fin de laquelle un mot de portugais (nove (9)) était inséré.

Les conditions cruciales de ce test sont celles où un seul point a été ajouté ou retiré. Si les mots ont un sens approximatif, ressemblant par exemple à nos numéraux une douzaine ou beaucoup, ils continuent à s'appliquer même si la quantité est changée d'une unité : la proportion de réponses oui dans cette condition devrait alors être la même que lorsque la transformation appliquée laisse la numérosité inchangée. Au contraire, si le sens des mots est exact, les sujets devraient refuser de l'appliquer à une autre quantité dès lors que celle-ci diffère de la première, ne serait-ce que d'une unité. Enfin, dans la condition où une grande quantité de points ont été ajoutés ou retirés, les numéraux exacts devraient cesser catégoriquement de s'appliquer, ainsi que très probablement les numéraux approximatifs.

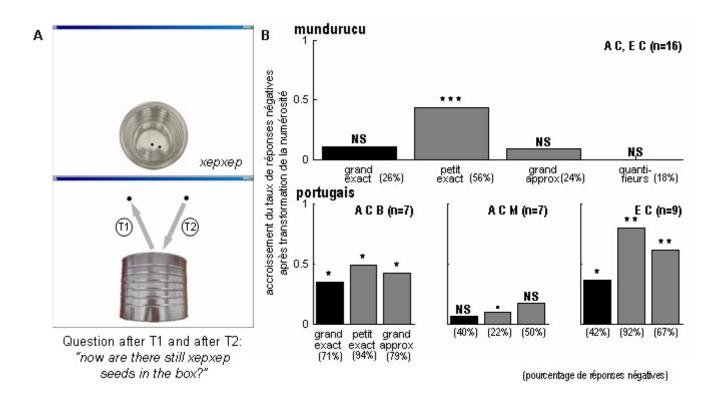


FIG. 10.7 – Test sur la précision du sens des numéraux (2005). A. Déroulement d'un essai. B. Les barres représentent la différence entre le taux de rejet du numéral dans la condition où la numérosité a changé, et ce même taux de rejet quand la numérosité est revenue au niveau initial. Cette mesure permet de savoir de combien les sujets modifient leurs réponses pour différents types de transformations sur la numérosité. Les taux de réponses négatives bruts sont reportés entre parenthèses. Nous avons distingué les petits numéraux (1, 2, 4) et les grands (en mundurucú: 7, 9, 10; en portugais: 9, 10, 27, 40). Pour les grands numéraux, la modification appliquée à la numérosité était soit précise (ajout ou retrait d'un point), soit approximative (multiplication ou division par un facteur 2). En mundurucú, nous avions également des essais avec des quantifieurs (peu, beaucoup). Comme tous ont répondu de la même façon, les données de tous les participants ont été rassemblées pour les numéraux mundurucús sur le graphique du haut. Le graphique du bas montre les réponses des trois groupes interrogés en portugais (A: adultes, E: enfants; M: monolingues, B: bilingues; C: sachant compter en portugais). [***: p<0.001, **: p<0.01, **: p<0.05, NS: p>0.1]

Résultats

D'un point de vue pratique, cette tâche a été plutôt difficile à appréhender pour les sujets. D'une part, certains ont assez mal accepté que nous leur imposions un mot en mundurucú pour désigner une certaine quantité, d'autant plus que certains des mots que nous avions choisis étaient soit des expressions très rares (pūg pogbi xepxep bodi, littéralement une main et deux à côté, 7), soit des expressions que nous n'avions jamais entendues, mais qui nous semblaient confromes aux règles syntactiques du mundurucu (pūg pogbi ebadipdip bodi, littéralement une main et quatre à côté, 9). Par ailleurs, la question que nous posions pouvait paraître ambiguë. Imaginez par exemple la situation suivante : on commence un essai avec deux points dans la boîte, et on rajoute un. A la question "y a-t-il toujours deux dans la boîte?", on peut imaginer de répondre oui (on peut trouver deux points dans la boîte). Sur le terrain, Pierre a fourni un effort particulier afin que les sujets comprennent la question comme nous l'entendions (il y a deux points en tout dans la boîte). Dans un souci de rigueur, nous tâcherons de prendre toutes les précautions nécessaires pour analyser les résultats en évitant les écueils que pourrait poser cette stratégie. Malgré toutes ces difficultés, 17 participants ont accepté de passer la version en mundurucú (3 adultes bilingues, 9 adultes monolingues, 5 enfants; cette version comprenait également un mot de portugais), et 9 ont passé la version portugaise (4 adultes bilingues, 1 adulte monolingue, 4 enfants). Dans les deux cas, il s'agit uniquement de sujets sachant compter en portugais.

Dans un premier temps, nous avons cherché à savoir s'il y avait une différence entre les taux de réponses selon qu'il y avait plus ou moins de points dans la boîte au moment de la question par rapport au début de l'essai, afin d'être sûrs que les sujets ont bien interprété notre question. Sur l'ensemble des essais (toutes langues confondues, à l'exception des essais sur les quantifieurs ade ma et ade $g\tilde{u}$, respectivement vraiment beaucoup et pas beaucoup), à la question, "'reste-t-il encore n?"', les sujets ne répondaient pas plus souvent oui quand il y avait plus de n points que quand il y en avait moins [test de Student apparié à une direction : T(27)=2.8, p=0.99]. Afin de nous affranchir de toute contamination, nous avons cependant jeté les essais où la quantité de points dans la boîte au moment de la question était supérieure à la quantité initiale, pour tous les sujets où la différence de taux de réponses positives entre les deux conditions dépassait 10% (5 sujets).

Au vu du faible nombre de participants, nous n'avons formé que deux groupes : les adultes (n=11 pour la version en mundurucú, n=5 pour la version en portugais), et les enfants (n=5 pour la version en mundurucú, n=4 pour la version en portugais). Nous rappelons qu'il s'agit uniquement de sujets sachant compter en portugais. Pour la version en mundurucú, nous avons considéré quatre conditions expérimentales : petits nombres (numéraux $p\tilde{u}g$ ma (1), xepxep (2), ebadipdip (4)), où la distance entre la numérosité de départ et la numérosité transformée est nécessairement faible (un point seulement a été ajouté ou retiré); grands nombres exacts (numéraux $p\tilde{u}g$ pogbi xepxep bodi (7), $p\tilde{u}g$ pogbi ebadipdip bodi (9), xepxep pogbi (10)) où la numérosité transformée ne diffère la numérosité d'origine que d'une unité; grands nombres approximatifs (idem), avec une distance entre numérosité d'origine et numérosité transformée plus importante (ajout ou retrait de $\frac{n}{2}$ unités); quantifieurs (ade $g\tilde{u}$ (peu), ade ma (beaucoup)).

²Pour justifier le regroupement des différents essais sous ces catégories, nous avons fait tourner trois analyses de variance séparément sur les trois types de numéraux, en introduisant un facteur distinguant les différents numéraux. Comme nous allons

Afin de décrire l'impact des transformations de numérosités, nous avons calculé la différence au niveau du taux de rejet du numéral entre les conditions où la numérosité était modifiée et celle où elle restait égale à la numérosité de départ. Ainsi, nous nous affranchissions des biais qui pouvaient différer entre les différentes conditions (notamment parce que les numéraux proposés étaient plus ou moins bien acceptés). Les participants avaient un comportement différent dans la condition petits nombres [effet de la condition numérique (petits nombres / grands nombres exacts / grands nombres approximatifs / quantifieurs) : F(3,42)=9.7 p<0.0001], où ils rejetaient le numéral initial dès lors que la numérosité était modifiée; par contre dans toutes les autres conditions, ils considéraient que le numéral continuait à s'appliquer, même lorsque la numérosité subissait des transformations importantes (voir figure 10.7 B). En particulier, les participants ont répondu de la même façon avec les grands numéraux qu'avec les quantifieurs [test de Student apparié, grands numéraux, transformation exacte ou approximative, vs quantifieurs : Ts(15)<1.2, p>0.25]. Par ailleurs, nous n'avons noté aucune différence entre les réponses des enfants et des adultes [Fs<1]. Ainsi, pour tous les participants, les grands nombres en mundurucú ont un sens flou : ils ne s'appliquent pas à une seule numérosité, mais à tout une gamme de numérosités.

En portugais, comme nous avions inséré un mot dans la version Mundurucú, les effectifs étaient plus importants dans nos deux conditions impliquant des grands nombres, aussi nous avons pu former trois groupes de sujets : adultes strictement monolingues, sachant tout de même compter en portugais (n=7), adultes présentant de meilleures compétences en portugais que les précédents (n=7), et enfants, où tous savaient bien compter en portugais (n=9). Les essais ont été regroupés sous trois catégories : petits nombres (numéraux um (1), quatro (4)); grands nombres exacts (numéraux nove (9), dez (10), vinte sete (27), quaranta (40)), où la distance entre numérosité de départ et numérosité transformée est de 1; grands nombres approximatifs (idem) avec une distance importante entre numérosité de départ et numérosité transformée.³

Reprenant la même analyse que pour la version en mundurucú, nous avons soustrait au taux de réponses négatives de chaque condition où la numérosité était modifiée le taux de réponses négatives pour une numérosité etait modifiée le taux de réponses négatives pour une numérosité etait modifiée le taux de réponses négatives pour une numérosité etait modifiée le taux de réponses négatives pour une numérosité etait modifiée le taux de réponses négatives pour une numérosité etait modifiée le taux de réponses négatives pour une numérosité etait modifiée le taux de réponses négatives pour une numérosité etait modifiée le taux de réponses négatives pour une numérosité etait modifiée le taux de réponses négatives pour une numérosité etait modifiée le taux de réponses négatives pour une numérosité etait modifiée le taux de réponses négatives pour une numérosité etait modifiée le taux de réponses négatives pour une numérosité etait modifiée le taux de réponses négatives pour une numérosité etait modifiée le taux de réponses négatives pour une numérosité etait modifiée le taux de réponses négatives pour une numérosité etait modifiée le taux de réponses négatives pour une numérosité etait modifiée le taux de réponses négatives de la contract de

étudier l'impact des modifications de numérosités sur les réponses, ce qui est important de vérifier dans ces analyses, c'est que le facteur numéral n'interagisse pas avec le facteur distance, qui précise la différence entre la numérosité test et la numérosité de départ : ainsi nous saurons que les sujets ont modifié leurs réponses de la même façon pour tous les numéraux. Pour les trois analyses de variance sur les petits nombres, les grands nombres et les quantifieurs, l'interaction suscitée n'était pas significative [petits et grands nombres : Fs<1; quantifieurs : F(2,26)=2.0, p=0.17], et n'interagissait pas non plus avec le groupe [Fs<1], justifiant le regroupement des essais en quatre catégories.

³Comme pour la version en mundurucú, nous avons dans un premier temps cherché à justifier ces regroupement en réalisant des analyses de variance séparées pour les petits nombres et les grands nombres, en introduisant un facteur distinguant les différents numéraux. De même, nous avons cherché la présence d'une interaction entre le facteur numéral et la distance séparant la numérosité test de la numérosité de départ. Pour les petits nombres, ces deux facteurs n'interagissent pas entre eux [F(1,5)=1.3, p=0.30] et nous n'avons pas non plus d'interaction avec le groupe [F(2,5)=2.6, p=0.17]. Pour les grands nombres, bien que l'interaction critique fusse loin de la significativité [F<1], celle-ci semblait se retrouver différer selon les groupes [triple interaction : F(12,244)=1.6, p=0.089] : mais à vrai dire, on ne retrouvait une interaction numéral distance qu'au niveau du groupe des adultes monolingues, où les effectifs étaient si faibles pour les numéraux dez, vinte sete et quaranta (entre 1 et 2 sujets) qu'il s'agissait certainement de fluctuations statistiques. Nous avons donc résolu de conserver le classement des essais en trois catégories.

rosité constante. Les participants se comportaient de la même façon que les nombres présentés fussent grands ou petits, et que la transformation appliquée à l'ensemble ait été de type exact (ajout ou retrait d'une unité) ou approximative (multiplication de la numérosité par un facteur 2 ou $\frac{1}{2}$) [effet de la condition expérimentale : F<1]. Par contre, selon les groupes, les réponses sont très différentes [effet de groupe : F(2,48)=7.9, p=0.0011] : les enfants, et les adultes bilingues rejettent le numéral initial dès lors que la numérosité a changé ne serait-ce que d'une unité [test de Student apparié unidirectionnel entre le taux de réponses négatives après modification de la numérosité, et le taux de réponses négatives pour la numérosité d'origine : ps<0.05], par contre les adultes monolingues (mais capables de compter en portugais) continuent d'appliquer le même numéral même lorsque la numérosité change drastiquement [même test : grands nombres T(6)<1.2, p>0.16; petits nombres T(2)=2.0, p=0.094]. Pour les petits nombres, on enregistre cependant une tendance à rejeter le numéral initial quand la numérosité est modifiée, rappelant le comportement des participants avec les numéraux mundurucús. Cette observation devra être vérifiée auprès d'un plus grand nombre de participants (nous n'en avons que 3 pour l'instant pour les petits nombres).

Discussion

En mundurucú, tous les participants interrogés attribuent un sens approximatif au numéraux, sauf dans le domaine des petits nombres (1 à 4). La gamme de numérosités attribuées à chaque numéral est si étendue que même lorsque la numérosité initiale était multipliée/divisée par 2, les participants continuent de considérer que le numéral s'applique à la nouvelle numérosité. Les réponses pour ces numéraux s'apparentent à celles que l'on enregistre pour des quantifieurs (peu, beaucoup). Le mundurucú ne dispose pas de numéraux précis.

Les enfants, et les adultes bilingues en portugais associent un sens exact aux numéraux portugais : alors qu'ils acceptent d'appliquer les numéraux mundurucús à un large intervalle de numérosité, ils savent que les numéraux portugais ne doivent être appliqués qu'à une quantité précise. Ainsi, ces participants sont capables d'attribuer des significations différentes aux numéraux, selon la langue parlée.

Par contre, les adultes monolingues se comportent avec les numéraux portugais comme avec les numéraux mundurucús, à savoir qu'ils acceptent de les appliquer à un large ensemble de numérosités. Bien qu'étant monolingues, les adultes interrogés dans ce test savaient tous réciter la liste des numéraux en portugais : nos données montrent donc qu'il n'est pas suffisant de connaître la séquence des numéraux portugais, ni même de pratiquer le comptage, pour savoir que les noms de nombres désignent des quantités exactes. Il faut pour cela avoir une meilleure connaissance de la langue portugaise, et peut-être même faut-il que cet aspect des numéraux portugais ait été enseigné : en effet, les participants qui savent que les numéraux portugais ont un sens exact sont en général ceux qui ont reçu une instruction élémentaire.

10.7.2 Expérience 5b : association des numéraux aux quantités qu'ils représentent

Dans ce dernier test, nous continuons d'étudier le sens que les Mundurukus prêtent aux numéraux mundurucús et portugais. Dans le test précédent, nous avons vu que les Indiens attribuent un sens quantitatif aux différents numéraux mundurucús et portugais. Ici, nous voulons voir si les Mundurucús sont capables

d'associer une valeur particulière de numérosité à chaque numéral.

Méthode expérimentale

Le test, emprunté à la littérature sur le développement [Wynn, 1992b], est très simple : à chaque essai nous présentions deux nuages de points de numérosité différente, et demandions au sujet de pointer vers le stimulus correspondant à un certain mot. Par exemple, les deux nuages contenaient respectivement 2 et 3 points, et le sujet devait montrer où se trouvait l'ensemble de deux points. Il n'était pas pressé pour répondre, et pouvait employer toutes les stratégies qu'il souhaitait - en particulier compter les points.

Nous utilisions en mundurucú les numéraux xepxep (2), ebadipdip (4), $p\tilde{u}g$ pogbi xepxep bodi (7 - expression peu usitée), $p\tilde{u}g$ pogbi ebadipdip bodi (9 - non observée dans notre corpus, formée à partir de régles syntaxiques supposées), xepxep pogbi (10), ainsi que les quantificateurs ade $g\tilde{u}$ (peu) et ade ma (beaucoup). En portugais nous utilisions les numéraux dois (2), quatro (4), sete (7), nove (9) et dez (10). La numérosité du nuage distracteur était soit proche de la numérosité cible (n-1,n+1), soit distante $(2n,\frac{n}{2})$. Afin de décourager les sujets de se baser sur des variables non-numériques de bas niveau, nous avions généré deux séries de stimuli en suivant les mêmes principes que dans nos précédents tests : pour la moitié des essais, les paramètres intensifs (taille des points, espacement entre les points) étaient maintenus constants, pour l'autre moitié au contraire on égalisait les paramètres extensifs (luminance totale et espace total occupé).

Chez les sujets occidentaux, on peut mesurer la précision de l'association entre numéraux et numérosités en l'absence de comptage, dans les tâches d'estimation de numérosité (voir chapitre 5.1). On voit dans ces conditions que les réponses sont corrélées avec la numérosité réelle, et que l'imprécision des réponses croît avec la taille du nombre. Si les Mundurucús savent associer une quantité avec chaque numéral, sans pour autant être capables d'extraire la numérosité exacte d'un ensemble, nous prédisons que leurs réponses s'apparenteront à ce qu'on peut attendre d'un occidental que l'on empêche de compter : ils pourraient obtenir des scores honorables dans les conditions où le distracteur est numéricalement distant de la cible ; par contre ils devraient en général échouer dans les conditions où le distracteur et la cible sont proches, le taux de réponses correctes étant déterminé par le ratio entre le distracteur et la cible. Globalement, plus les nombres augmentent, plus le taux de réponses correctes devrait s'approcher du niveau du hasard. Si les sujets ne savent pas à quelle quantité correspond chaque numéral, ils devraient se situer au niveau du hasard dans toutes les conditions. Enfin, si les sujets comptent les ensembles, ils devraient réussir à trouver la numérosité cible dans toutes les conditions.

Résultats

Trente-cinq sujets ont été interrogés sur la version en mundurucú, et 29 sur la version en portugais. Seuls deux bilingues ayant passé la version en mundurucú, nous avons regroupé les participants de la manière suivante : adultes monolingues ne sachant pas compter en portugais (7), adultes sachant compter en portugais (18 dont 2 bilingues), enfants ne sachant pas compter en portugais (5), enfants sachant compter en portugais (5). Tous les groupes avaient des performances similaires [pas d'effet principal de groupe, ni d'interaction

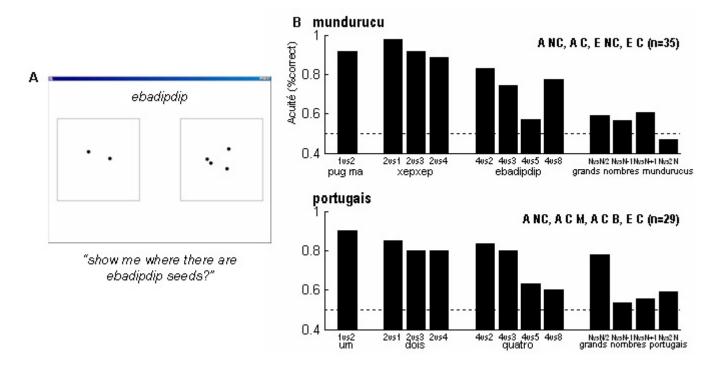


FIG. 10.8 – Test des associations entre numéraux et numérosités (2005). A. Exemple d'essai. B. Taux de réponses correctes pour les différents numéraux testés, séparés selon le type de distracteur. Nous avons présenté les mêmes numéraux en mundurucú (graphique du haut) et en portugais (graphique du bas). La condition grands nombres rassemble les numéraux 7, 9, et 10. Aucune différence entre les groupes n'ayant été enregistrée, nous représentons les données moyennées entre tous les participants. (A : adultes, E : enfants; C : sachant compter en portugais, NC : ne sachant pas compter; M : monolingues, B : bilingues).

entre le groupe et la taille de la cible, ni d'interaction entre le groupe et le type de distracteur : Fs<1; triple interaction groupe.cible.distracteur : F(27,279)=1.1, p=0.30]. Conformément aux prédictions, le taux de réponses correctes décroissait quand la taille de la cible augmentait (voir figure 10.8) [pūg ma (1) : 91%; xepxep (2) : 94%; ebadipdip (4) : 72%; grands nombres : 56%; F(3,93)=53.1 p<0.0001]; nous avons vérifié par ailleurs que le niveau d'acuité des réponses était le même pour tous les grands numéraux (púg pogbi xepxep bodi (7), pūg pogbi ebadipdip bodi (9), et xepxep pogbi (10)) [pas d'effet du numéral, ni d'interaction avec le groupe, le type de distracteur : Fs<1; triple interaction numéral.groupe.distracteur : F(18,186)=1.3 p=0.17]. Si les performances décroissent avec la taille du nombre, les Indiens restent performants dans toutes les conditions : même pour les grands nombres, ils se situent globalement au-dessus du niveau du hasard [Test de Student par rapport à 50% : t(34)=2.8, p=0.0094]. Par ailleurs, dans le cas du numéral ebadipdip, les performances suivaient la loi du ratio : les sujets étaient meilleurs quand celui-ci contenait 2, 3, ou 8 points, que lorsqu'il en contenait 5, qui était le distracteur le plus proche de la cible 4 en terme de ratio. Dans tous les autres cas, le type de distracteur n'influait pas sur le niveau de performance [pas d'effet du type de distracteur Fs<2 et ps>0.13; pas d'interaction entre le type de distracteur et le groupe Fs<1.5 et ps>0.19].

Le profil des réponses était exactement le même dans la version portugaise. Pour cette version, nous avons pu former 4 groupes de sujets, différents de ceux que nous avons considérés pour la version mundurucú : adultes ne sachant pas compter en portugais (5), adultes monolingues sachant compter en portugais (12), adultes bilingues sachant compter en portugais (6). Comme en mundurucú, tous les groupes se sont comportés de la même façon [pas d'effet de groupe, ni d'interaction avec la taille des nombres : Fs<1.7, p>0.19]. Nous avons retrouvé un effet de la taille des nombres [um (1) : 90%; dois (2) : 83%; quatro : 72%; grands nombres : 61%; F(3,75)=15.0, p=<0.0001], qui semblait se prolonger jusque vers les grands nombres [7 : 70%; 9 : 60%; 10 : 56%; F(2,50)=3.0, p=0.058; pas d'interactions doubles ni triple avec le groupe et le type de distracteurs : Fs<1]. Comme en mundurucú enfin, les participants sont au-dessus du niveau du hasard dans toutes les conditions, prouvant qu'ils ont réussi à associer une représentation sémantique de quantité approximative aux mots portugais [Test de Student par rapport à 50% : toutes ps<0.001].

Ainsi, les réponses des Mundurucús présentent la même structure que les réponses des adultes occidentaux en estimation, c'est-à-dire dans des conditions où le comptage est impossible : plus les nombres grandissent, plus les réponses sont imprécises. On peut approfondir encore l'analogie entre nos données chez les mundurucú et nos données d'estimation chez l'adulte occidental. Nous avons vu au chapitre 5.1 que les sujets occidentaux présentent en général une tendance à la sousestimation : pour donner un ordre d'idée, les stimuli menant à la réponse '40' pouvaient contenir de 40 à 80 points. Ainsi, si on demandait à des occidentaux de désigner le nuage contenant 40 points parmi deux alternatives, ceux-ci seraient assez mauvais quand le choix porterait sur deux nuages contenant respectivement 40 et 80 points (le stimulus de 80 points parassant en contenir 40), et par contre ils n'auraient pas de problème pour départager deux nuages de 40 et 20 points (tous les deux paraîtraient petits, mais à tout prendre le stimulus de 40 points semblerait le plus approprié). En somme, ils

seraient meilleurs dans la condition où la numérosité du distracteur est égale à la moitié de celle de la cible, que dans toutes les autres conditions, y compris celle où elle vaut le double de la numérosité cible. C'est précisément ce que nous observons chez les Mundurucú quand on les interroge sur les mots portugais : ils sont bien meilleurs pour exclure les distracteurs beaucoup trop petits que les autres, et ce pour les grands numéraux [Test de Student apparié entre les conditions où la numérosité du distracteur est égale au double et à la moitié de la numérosité cible : t(28)=2.6, p=0.015] et pour quatro [même test : t(28)=2.5, p=0.017].

Enfin, pour les quantifieurs ade ma (vraiment beaucoup) et ade $g\tilde{u}$ (pas beaucoup), les participants ont répondu en choisissant respectivement le plus numéreux ou le moins numéreux des deux ensembles. L'analyse de ces essais a confirmé les résultats que nous obtenions dans notre expérience de comparaison. Le niveau de performance dépendait simplement de la distance entre le distracteur et la cible [F(3,93)=5.2, p=0.0024], et ce de la même façon dans tous les groupes [effet principal de groupe, interactions impliquant le facteur de groupe : Fs<1].

Discussion

Les sujets montrent les mêmes connaissances des numéraux mundurucús et portugais, auxquels ils parviennent à associer une représentation sémantique de quantité. Cependant, ces associations sont extrêmement floues, ainsi les performances restent assez mauvaises pour décider entre deux quantités différant d'un facteur deux. Aussi surprenant que cela puisse paraître, les mundurucús ne diffèrent pas en cela des occidentaux, si ce n'est sur la taille des nombres concernés : en effet nos expériences d'estimation ont montré que les occidentaux sont très imprécis quand il s'agit d'associer un numéral à une numérosité, et il n'est pas rare de voir deux numérosités différant d'un facteur 2 associées à la même réponse verbale. On retrouve même en portugais l'effet de sous-estimation que nous avions observé dans notre tâche d'estimation.

La maîtrise du comptage ne semble pas avoir un effet sur la mise en place des associations entre les numéraux et les quantités. En effet, d'une part, tous les groupes se comportent ici de la même façon, y compris les adultes ne sachant pas compter. Par ailleurs, nous avons les mêmes réponses en mundurucú et en portugais, alors que le comptage n'est pas pratiqué en mundurucú.

Enfin, il est intéressant de noter qu'aucun des participants n'a compté pour résoudre cette tâche, pas même ceux présentant le plus haut degré de bilinguisme. Au contraire, les enfants de 3 ans 1/2, qui viennent d'acquérir le principe de cardinalité, utilisent spontanément le comptage dans les mêmes conditions [Wynn, 1992b]. Nos données suggèrent que la compréhension du comptage par les Mundurucús est en fait assez limitée. Ceux-ci n'ont probablement pas compris le principe de cardinalité, selon lequel le dernier mot énoncé en comptant représente le cardinal de l'ensemble dénombré. Les Mundurucús n'appliquent pas spontanément le comptage à des situations nouvelles. En cela, ils ressemblent aux enfants de 3 ans, qui savent réciter la séquence des nombres et appliquer la routine du comptage correctement, mais ne l'utilisent pas dans un but de dénombrement.

10.8 Discussion générale

Nous étudions une population d'Amazonie, les Mundurucús, dont le lexique numérique présente la particularité d'être fort restreint, ne comportant des numéraux que pour les nombres de 1 à 5. Les études avec les Mundurucús nous permettent d'aborder la question du rôle du langage dans le développement de la cognition numérique, et plus précisément, le rôle du lexique numérique d'une part, et de la pratique du comptage d'autre part. Dans les cultures occidentales, il semble que de nouveaux concepts apparaissent au moment où les enfants apprennent à utiliser le lexique numérique, mais, en étudiant simplement ces enfants, il est difficile d'estimer où commencent et s'arrêtent les rôles respectifs de l'environnement culturel (en particulier la familiarisation progressive avec les noms de nombres), et de la maturation cérébrale pure, indépendante de l'environnement. L'étude des Mundurucús, qui, tout en étant adultes, n'ont pas été familiarisés avec nos symboles numériques et tous les concepts mathématiques qui leur sont liés, permet de séparer ces deux facteurs.

Les Mundurucús sont capables d'accéder à des numérosités dépassant de loin leur limite lexicale, et connaissent les lois fondamentales régissant l'évolution de la cardinalité des ensembles (union et addition, séparation et soustraction, ordre sur les numérosités) : sur un ensemble de tâches d'arithmétique approximative, où il est demandé d'estimer grossièrement le résultat des opérations, le comportement des Indiens est similaire à celui d'adultes occidentaux. En particulier, les Mundurucús n'ont pas des difficultés aussi prononcées que les jeunes enfants et les animaux lorsqu'on s'écarte du domaine des petits nombres. Par contre, lorsqu'on les confronte à des tâches arithmétiques requiérant un résultat exact, ils continuent de donner des réponses approximatives. Pour autant, ils peuvent juger de l'égalité exacte entre deux ensembles, lorsque les circonstances leur permettent de vérifier que les éléments de ces ensembles entrent en correspondance bijective. Ils ne sont pas dépourvus du concept abstrait d'égalité exacte, même s'ils ne parviennent pas toujours à déployer ce concept dans certains contextes.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés au sens que les Indiens prêtent aux numéraux de leur langue et de la langue portugaise. Tous considèrent que les numéraux Mundurucú ont un sens approximatif, et s'appliquent à un large intervalle de numérosités. Les numéraux mundurucús ressemblent en cela à l'expression française "une dizaine" par exemple. Pour les numéraux portugais, seuls ceux qui connaissent bien cette langue savent qu'ils désignent des quantités exactes; par contre, tous associent des valeurs approximatives de numérosité aux numéraux portugais.

En résumé, les Mundurucús ne diffèrent des occidentaux que sous les deux aspects suivants :

- Pour ceux qui ne parlent pas portugais, ils n'ont pas de nombres exacts; en conséquence ils ne peuvent pas mémoriser des valeurs précises de numérosité.
- Ils ne disposent pas d'une procédure adéquate pour extraire la numérosité exacte d'un ensemble; à chaque fois qu'ils veulent évaluer une numérosité, ils utilisent donc une valeur approximative.

Ces deux points expliquent qu'ils "'échouent" sur la plupart des tâches exactes, du type de notre soustraction exacte, tout en possédant tout le bagage conceptuel nécessaire. En effet ces tâches requièrent l'extraction de

la numérosité exacte de l'ensemble et sa manipulation en mémoire de travail. L'échec des Pirahãs étudiés par Gordon [Gordon, 2004] dans des tâches d'appariement numérique exact s'explique vraisemblablement de la même manière, et nous estimons donc que ses données ne permettent pas de conclure que les Pirahãs ne possèdent pas le concept de nombre exact. Seule l'utilisation de tâches comparables à celle de nos expériences 3b et 4a permettrait de l'établir.

10.8.1 Représentations numériques non-verbales

Pour des tâches impliquant de grandes numérosités, on retrouve dans le comportement des Mundurucús les mêmes effets de distance que chez l'adulte occidental, chez les bébés, et les animaux. Les réponses s'accordent remarquablement bien avec les prédictions de notre modèle de représentations des numérosités sur un continuum interne (cf chapitre 4), que ce soit pour comparer des numérosités, les additionner, ou les soustraire. La fraction de Weber interne w, paramètre du modèle qui mesure le niveau d'imprécision des représentations numériques, est estimée à hauteur de 0.17 pour les Mundurucús sur les données de comparaison, une valeur proche de ce qu'on obtient traditionnellement avec des sujets occidentaux (pour les sujets contrôle de notre étude courante : w=0.12; par ailleurs une valeur de 0.17 avait été obtenue dans nos deux tâches psychophysiques de comparaison à une référence et de détection de changement, voir à ce sujet le chapitre 5.1). L'ensemble de ces résultats apporte donc de nouvelles preuves à l'existence d'un sens des nombres, faculté antérieure au langage partagée universellement entre les humains, quelle que soit la civilisation dans laquelle ils vivent, les bébés et de nombreuses espèces animales.

Chez les bébés, l'utilisation de ce système de représentations approximatives est conjuguée à un autre système, les pointeurs attentionnels, qui offrent un accès à la numérosité exacte pour les petits nombres. La coexistence de deux types de représentations numériques, que les bébés ne semblent pas à même de relier entre elles, génère des comportements troublants, en particulier pour comparer deux numérosités qui se situent à la frontière entre petits et grands nombres. Par exemple, si on cache des morceaux de biscuit un à un dans des boîtes, les bébés choisissent complètement au hasard entre deux boîtes contenant respectivement 1 et 4 objets (alors qu'ils se dirigent systématiquement vers la boîte contenant 3 biscuits s'il n'y en a qu'un dans l'autre) [Feigenson, 2005]. En fait, dès lors que l'une des boîtes contient plus de 4 objets, les bébés ne parviennent plus à répondre. La capacité de relier ces deux types de représentations non-verbales pourrait émerger de l'apprentissage des numéraux de la langue aux alentours de 2-3 ans, et d'une pratique intensive du comptage. Testés sur des conditions similaires, les Mundurucús sont un peu gênés lorsque 6 objets ou plus sont présentés de manière séquentielle, mais leurs performances ne s'écroulent pas complètement pour autant, contrairement à ce qu'on observe traditionnellement chez les jeunes enfants et les animaux. Vraisemblablement, les difficultés des Mundurucús refléteraient une différence de précision dans les représentations numériques selon qu'elles ont été extraites d'un ensemble présenté séquentiellement ou simultanément. Pour vérifier cette conclusion, il sera nécessaire de compléter les effectifs chez les Mundurucús d'une part (pour l'instant la tendance des performances à baisser en présentation séquentielle n'est pas significative), et mener de nouvelles expériences chez les occidentaux, afin de comparer la précision des représentations numériques en fonction du mode de présentation des ensembles.

L'acquisition des numéraux joue-t-il un rôle dans l'établissement d'association entre les différents types de représentations numériques non-verbales? Le fait que les Mundurucús parviennent à comparer des grandes quantités présentées séquentiellement indique qu'ils utilisent le même système de représentation des numérosités approximatives, quelle que soit la taille des nombres en jeu. Ils ont donc réussi à mettre en place des associations entre leurs représentations approximatives, et les représentations des petits nombres. La mise en place de ces associations ne nécessite donc pas un lexique numérique étendu, ni la pratique du comptage. Les Mundurucús possèdent des numéraux pour les petits nombres de 1 à 5, ils ont donc des mots pour désigner toutes les numérosités sur lesquelles le système de pointeurs attentionnels est susceptible de fournir des informations (petites numérosités entre 1 et 3). Il est possible que ce soit l'usage de ces mots qui leur ait permis de construire des liens entre leurs différentes représentations non-verbales. Dans ce contexte, il serait donc intéressant de proposer notre test à des populations ayant un lexique numérique encore plus restreint, comme par exemple les Pirahãs qui n'ont que trois mots pour qualifier des quantités (un, deux, beaucoup).

Ainsi, nos données restent donc en accord avec l'idée que l'usage des numéraux un à trois permet de créer des associations entre les deux types de représentations numériques. Par contre, nous montrons que la pratique du comptage ne joue aucun rôle.

10.8.2 Le concept de nombre exact des Mundurucús

Les Mundurucús ont un concept de numérosité exacte, puisqu'ils sont capables de concevoir l'égalité exacte entre les cardinaux de deux ensembles. En effet, ils peuvent juger si deux ensembles contiennent exactement le même nombre d'éléments, si on leur offre la possibilité de vérifier si les éléments des deux ensembles peuvent être mis en correspondance entre eux. S'ils montrent ainsi qu'ils ont compris que toute numérosité peut être définie à l'unité près, il reste fort possible qu'ils ne conçoivent pas un certain nombre de propriétés des numérosités exactes. Ils ne possèdent probablement pas de concept pour chaque quantité exacte, comme par exemple exactement six, exactement sept [Gelman and Butterworth, 2005] : s'ils pouvent vérifier que deux ensembles de 6 et 7 points ne contiennent pas le même nombre d'éléments, seraient-ils capables de construire de tels ensembles, de reconnaître différents exemplaires d'ensembles de six points? Savent-ils qu'en ajoutant plusieurs fois un élément, on peut parcourir l'ensemble des cardinaux possibles? Ont-ils une notion de l'infini? Ces questions fascinantes restent ouvertes et feront l'objet de recherches futures.

10.8.3 Attribution d'une signification aux numéraux

On rend compte du développement de la cognition numérique de l'enfant en prêtant un rôle fondamental à l'apprentissage du comptage, première activité de la vie de l'enfant où celui-ci met en contact ses représentations non-verbales de numérosité avec les concepts mathématiques fournis par notre culture [Gelman and Butterworth, 2005]. Pour certains [Fuson, 1988], la pratique du comptage est ce qui permet à l'enfant de comprendre que les numéraux désignent en fait des quantités. Si les Mundurucus ont des numé-

raux jusqu'à 5, le comptage ne fait pas partie de leur culture. Nous avons demandé à tous de réciter la suite des nombres en mundurucú et en portugais : en mundurucú, cet exercice est effectué très lentement, souvent entâché d'erreurs, et plusieurs tentatives sont nécessaires avant de parvenir à une réponse qui satisfasse le participant. Ce comportement contraste avec la fluidité avec laquelle certains récitent la suite des numéraux en portugais. Pour ceux qui ne connaissent pas le portugais, nous sommes donc en présence d'une population qui ne pratique pas du tout le comptage, et pourtant possède un petit lexique pour désigner des quantités (numéraux jusqu'à 5, et quantifieurs).

Les tests que nous avons posés nous ont permis de dissocier deux aspects de la signification des numéraux :

- Pour les Mundurucús, les numéraux désignent-ils une quantité exacte ou approximative? Doit-on changer de numéral dès lors qu'on change de numérosité, ou chacun peut-il s'appliquer à une large gamme de numérosités?
- Les Mundurucús sont-ils capables d'associer une valeur de quantité particulière, exacte ou approximative, à chacun des numéraux?

Nous obtenons des profils différents pour les numéraux mundurucûs et portugais. Tous les participants, quelle que soit leur âge, leur niveau d'éducation et leur niveau de connaissance de la langue portugaise, attribuent un sens approximatif aux numéraux mundurucûs supérieurs à ebadipdip (4). De même, ils sont capables de leur associer une valeur quantitative : cette valeur est assez précise jusqu'à ebadipdip, mais après elle devient très approximative, en sorte qu'il leur est difficile de décider si xepxep pogbi (10) correspond plutôt à une numérosité de 5, 10 ou 20. Ce ne peut pas être dû à un manque d'expérience avec ce numéral : une grande partie d'entre eux ont produit l'expression xepxep pogbi lorsque nous leur avons demandé de réciter les nombres mundurucûs. De plus, quand cette expression était produite, elle était en général accompagnée d'un geste consistant à montrer l'ensemble des doigts des deux mains. Le fait d'avoir accumulé plusieurs expériences d'un numéral, quasi-systématiquement associé à une quantité donnée n'est donc pas suffisante pour augmenter le niveau de précision de la numérosité associée à ce numéral.

En revanche, en portugais, les caractéristiques de la signification que chacun attribue aux numéraux dépendent grandement de son niveau de connaissance de la langue portugaise. Seuls ceux qui montrent d'assez bonnes compétences en portugais savent que les numéraux portugais sont associés à des quantités exactes. En revanche, tous semblent pouvoir associer aux numéraux une valeur approximative de quantité (précise dans le cas des petits nombres). De plus, comme les occidentaux, les participants ont tendance à sous-estimer les nuages de points : ils ont tendance à associer les numéraux avec des ensembles trop numéreux. Ainsi, lorsqu'on demande aux Indiens de pointer vers l'image contenant dez (10) points, et qu'on donne le choix entre deux images contenant 5 et 10 points, ils savent exclure la proposition de 5 points; par contre ils répondent au hasard lorsqu'on leur demande de choisir entre 10 et 20 points. Tous les participants sachant compter en portugais ont ainsi démontré qu'ils savaient associer des quantités approximatives aux numéraux portugais; et même ceux qui ne connaissent pas un mot de portugais, et ne savent pas réciter la liste des nombres, ont été capables de répondre à la question pour les tout petits nombres. Il suffit donc aux Indiens d'une exposition minime aux numéraux pour leur construire une signification quantitative approximative.

Comment situer le cas des Mundurucús par rapport à la trajectoire développementale de l'enfant ? Il est difficile de comparer nos résultats avec ce qu'on observe chez l'enfant occidental, tant les résultats présentés dans la littérature en psychologie développementale sont mitigés pour l'instant. Plusieurs auteurs ont étudié la question de la signification des numéraux pour les enfants de 2-3 ans, essayant de distinguer si les numéraux prennent pour eux un sens exact ou approximatif [Sarnecka and Gelman, 2004], [Lipton and Spelke, 2005]. La position des plus jeunes enfants, ceux qui n'ont pas encore acquis le principe de cardinalité, reste ambiguë : dans certains tests ils choisissent de changer de numéral dès lors que la numérosité à désigner est modifiée ; dans d'autres ils acceptent d'appliquer le même numéral à deux quantités dont ils ont pertinemment vu qu'elles différaient d'un élément. Les enfants plus âgés, ayant passé le stade de compréhension du principe de cardinalité, attribuent un sens exact à tous les numéraux, même ceux qu'ils ne savent pas atteindre en comptant. Nos résultats montrent que l'acquisition de cet aspect de la signification des numéraux est indépendante de la maîtrise du comptage, puisque les mundurucús qui savent compter en portugais n'attribuent un sens exact aux numéraux portugais que s'ils montrent par ailleurs une assez bonne connaissance du portugais.

Pour ce qui est des associations entre numéraux et valeurs de numérosité, leur mise en place a été très peu étudiée chez l'enfant. Récemment, LeCorre (communication personnelle) a demandé à des enfants âgés de 4 ans de réaliser des estimations sur des nuages de points. Bien que les enfants interrogés aient tous passé le stade de compréhension du principe de cardinalité, tous ne se comportent pas de la même façon dans cette tâche. Chez certains, les estimations augmentent progressivement avec la numérosité présentée; chez d'autres, au-delà d'une certaine quantité, les estimations se stabilisent, et les enfants produisent indifféremment le même numéral. Tous nos participants mundurucús se situent manifestement au-delà de cette étape développementale, puisque même si les quantités associées aux numéraux sont floues, les grands nombres restent associés à des numérosités plus élevées.

Il n'est pas clair enfin que les données que nous avons recueillies auprès de Mundurucús d'âges divers permettent de reconstruire leur propre trajectoire développementale. Parmi les Indiens, nous avons étudié des enfants, parfois très jeunes (âge minimum 4 ans, maximum 12 ans). Les conditions dans lesquelles ces enfants grandissent sont très différentes de celles qu'ont connues leurs aînés. Les enfants vont pratiquement tous à l'école, ils ont beaucoup plus de contact avec la civilisation occidentale qu'il y en avait il y a 50 ans. Il est possible donc que ces enfants empruntent une trajectoire développementale différente de celle qu'ont suivie les adultes Mundurucús, et plus proche de ce qu'on observe chez les enfants occidentaux. A l'inverse des adultes, les enfants montrent une certaine compréhension du fait que les numéraux portugais ont un sens exact. Bien qu'ils soient monolingues en mundurucú, ces enfants sont tous allés à l'école, tout comme les adultes bilingues, autre groupe qui considérent que les numéraux portugais ont un sens exact. Peut-être la compréhension de l'aspect exact des numéraux portugais émerge-t-elle de l'enseignement dispensé à l'école?

10.8.4 Conséquences pour les hypothèses de Whorf et de Chomsky

En conclusion, quelles sont les conséquences de nos résultats pour l'hypothèse de Chomsky? Ce dernier postulait que l'"infinité discrète", caractéristique essentielle de la faculté de langage, sert de fondement à

l'acquisition du concept de nombre. Or, nos expériences n'ont porté que sur la possession d'un lexique de noms pour les nombres exacts. Bien entendu, les Mundurucús, en tant que membres de l'espèce humaine, disposent d'une langue et de la faculté de langage ou "grammaire universelle" au sens de Chomsky. Nos expériences ne permettent donc pas d'étudier l'impact de l'absence de la faculté de langage - mais seulement l'impact de l'absence d'un lexique des nombres exacts.

Quelle que soit la raison de cette limitation linguistique, nos résultats suggèrent que l'hypothèse Chomskyenne d'un lien étroit entre compétence numérique et faculté de langage demande à être nuancée. Tout d'abord, il faut admettre l'existence d'une représentation non verbale des nombres approchés, et d'une compétence réellement conceptuelle pour l'appréhension et la manipulation des quantités numériques approximatives. Cette compétence paraît totalement indépendante du langage dans la mesure où elle existe non seulement chez les Mundurucús et les nourrissons de l'espèce humaine, mais également chez de nombreuses espèces animales. Son existence n'avait pas été explicitement envisagée par Chomsky, qui s'est d'ailleurs peu prononcé sur les origines de la compétence arithmétique de l'espèce humaine. Toutefois, l'hypothèse d'un sens du nombre (un ensemble de circuits cérébraux qui nous permet de comprendre ce qu'est le cardinal d'un ensemble d'objets, et comment ce cardinal se modifie ou non en fonction des opérations appliquées à l'ensemble) est éminemment compatible avec l'esprit de l'approche Chomskyenne, selon laquelle les compétences cognitives humaines reposent sur des systèmes modulaires spécialisés.

Nos résultats suggèrent également que la capacité de manipuler de grands nombres exacts n'existe que dans certaines cultures, dont la nôtre, qui se trouvent posséder un vaste lexique de noms de nombres exacts ainsi que des règles syntaxiques pour les combiner et engendrer une infinité de noms de nombres. Cet aspect de nos résultats paraît compatible avec l'hypothèse Chomskyenne selon laquelle la capacité combinatoire du langage joue un rôle essentiel dans l'émergence de l'arithmétique. Cependant, ce lien entre langage et calcul exact est certainement moins fondamental que ne le postule Chomsky. Sans le comptage, qui suppose la récitation rapide d'une suite des noms de nombres, il n'est pas possible de réussir la plupart des tâches d'arithmétique exacte. Si on permet aux Mundurucús d'utiliser d'autres stratégies pour vérifier la stricte égalité entre deux ensembles, comme la mise en correspondance des éléments de deux ensembles un à un, ceux-ci sont capables de distinguer des numérosités élevées ne différant que d'une unité. L'effet du langage dans notre test de soustraction exacte ne concerne donc, pour reprendre une autre distinction introduite par Chomsky, qu'une différence de performance – c'est-à-dire l'ensemble des facteurs qui déterminent la capacité de réussir la tâche demandée – plutôt qu'une authentique différence de compétence conceptuelle. La réussite à ce test dépend non seulement de la maîtrise du concept de nombre exact (compétence arithmétique abstraite que les Mundurucús pourraient bien posséder), mais également d'autres facteurs que Chomsky qualifierait d'" externes ", tels que la capacité de compter avec efficacité.

Enfin, à plus forte raison, nos résultats contredisent la conclusion de Gordon, qui se fait le champion de l'hypothèse de Whorf d'un déterminisme linguistique, selon laquelle les concepts numériques des Pirahãs sont "incommensurables" aux nôtres [Gordon, 2004]. Nous postulons que les Pirahãs interrogés par Gordon sont doués du même bagage conceptuel que les Mundurucús, et que ceux-ci ont simplement échoué à sa

tâche de reproduction de numérosité pour n'avoir pas réussi à mettre en oeuvre une stratégie fiable pour construire une bijection entre le modèle et leur réponse. Dans l'état actuel des connaissances, vu le très faible nombre de participants Pirahãs et de tests réalisés par Gordon, cette hypothèse nous paraît plus raisonnable et minimale que celle qui leur attribue une cognition numérique radicalement différente de la nôtre.

10.8.5 Perspectives

Nous avons décrit ici des données qui sont encore à l'état d'études pilotes. Dans certains cas, les effectifs sont encore extrêmement réduits, et il faudra envisager une nouvelle mission de Pierre pour compléter les groupes. Par ailleurs, nous songeons à un certain nombre d'améliorations sur les tests que nous avons conçus :

- une nouvelle version du test de soustraction sera proposée aux Indiens, où nous leur permettrons de prendre le temps qu'ils désirent pour quantifier les ensembles;
- nous étudierons une variante du test non-verbal sur le concept de grand nombre exact, où les ensembles resteront visibles tout au long de chaque essai. Ce changement permettra de tester une hypothèse que nous avons eu sur l'échec des enfants sur des tâches assez similaires. Nous pensons que lorsque les ensembles sont visibles, les enfants ne parviennent pas à inhiber le jugement émis par leur système de représentation de la numérosité approximative, selon lequel les deux numérosités sont égales. Par ailleurs, ce test sera simplifié en supprimant la dernière étape de chaque essai. Enfin, nous travaillons au développement d'une version de ce test adaptée pour les jeunes enfants.
- le test sur le sens, exact ou approximatif, des numéraux, ne compte que très peu d'essais pour chaque participant. De plus, certains ont pu se sentir confus car nous leur proposions des expressions extrêmement rares en mundurucu. Ce test sera affiné en nous concentrant sur des numéraux courants, et en restreignant les essais à la seule situation où des éléments ont été retirés, afin d'éviter toute ambiguïté dans la question que nous posons;
- enfin, nous avons vu que les mundurucús semblent associer les numéraux plus grands avec des numérosités plus grandes. Afin de vérifier ce point, nous leur proposerons un test de comparaison symbolique, avec des numéraux. En portugais, s'ils savent que les numéraux situés plus loin dans la liste représentent des quantités plus grandes, ils devraient être capables de réaliser cette tâche. Par ailleurs, nous recherons la présence chez eux d'un effet de distance pour la comparaison symbolique, car cet effet révèle les associations entre les symboles et les quantités chez les occidentaux.

RÉSUMÉ - Cognition numérique chez les Mundurucús 1/2

Nous étudions une population d'Amazonie, les Mundurucús, dont le lexique numérique présente la particularité d'être fort restreint, ne comportant des noms que pour les nombres de 1 à 5. Ces études nous permettent donc d'aborder la question du rôle du langage dans le développement de la cognition numérique. Trois hypothèses ont été défendues : soit les compétences arithmétiques se développent sur la base des représentations non-verbales de numérosité, indépendemment du langage. Dans ce cas, l'utilité du langage est d'apporter un ensemble d'outils, de procédures, pour gagner en efficacité sur les tâches exactes; mais le langage ne serait d'aucune utilité pour évaluer approximativement la réponse d'un problème arithmétique. Selon une seconde possibilité, l'arithmétique, les nombres, seraient une abstraction de la faculté de récursion, qui est aussi un précurseur du langage. Enfin, d'autres théories se situent entre ces deux alternatives, c'est le cas de la théorie du bootstrapping [Carey, 2001] : les systèmes de représentations non-verbales de numérosité comme le langage seraient nécessaires au développement des capacités arithmétiques. A partir des noms des petits nombres, qu'il met en rapport avec ses représentations des petites numérosités, l'enfant généraliserait à l'ensemble de la liste des numéraux la propriété que chacun réfère à une quantité différente, et seulement à ce moment-là, il en déduirait que toute numérosité peut être définie de manière exacte.

Inspirés des distinctions introduites par ses trois hypothèses, nos travaux s'articulent autour des questions suivantes :

- Existe-t-il une compétence arithmétique universelle, indépendante du langage, comme semblent l'indiquer tout un ensemble convergent de données recueillies auprès de populations diverses, en particulier des patients aphasiques, des enfants préverbaux, des animaux non-verbaux?
- Le langage (plus précisément : la possession d'un lexique numérique étendu, et la pratique du comptage)
 est-il indispensable au développement d'un concept de numérosité exact?
- Quel est le sens des numéraux mundurucús? Quelle signification attribuent-t-ils aux numéraux portugais?

Nos résultats montrent que les Mundurucús sont capables d'accéder à des numérosités dépassant de loin leur limite lexicale, et connaissent les lois fondamentales régissant l'évolution de la cardinalité des ensembles (union et addition, séparation et soustraction, ordre sur les numérosités) : sur un ensemble de tâches d'arithmétique approximative, où il est demandé d'estimer grossièrement le résultat des opérations, le comportement des Indiens est similaire à celui d'adultes occidentaux. En particulier, les Mundurucús n'ont pas des difficultés aussi prononcées que les jeunes enfants et les animaux lorsqu'on s'écarte du domaine des petits nombres. Par contre, lorsqu'on les confronte à des tâches arithmétiques requiérant un résultat exact, ils continuent de donner des réponses approximatives. Pour autant, ils peuvent juger de l'égalité exacte entre deux ensembles, lorsque les circonstances leur permettent de vérifier que les éléments de ces ensembles entrent en correspondance bijective.

\dot{RESUME} - Cognition numérique chez les Mundurucus - 2/2

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés au sens que les Indiens prêtent aux numéraux de leur langue et de la langue portugaise. Tous considèrent que les numéraux Mundurucú ont un sens approximatif, et s'appliquent à un grand intervalle de numérosités, comme l'expression française "'une dizaine"' par exemple. Pour les numéraux portugais, seuls ceux qui connaissent bien cette langue savent qu'ils désignent des quantités exactes; par contre, tous savent associer des valeurs approximatives de numérosité aux numéraux portugais. Nos expériences montrent qu'il n'est pas nécessaire de manipuler un lexique numérique étendu, ni même de pratiquer le comptage pour développer un concept de nombre exact. Par ailleurs, la compréhension de la signification des numéraux est un processus complexe, où la valeur quantitative des numéraux peut être dissociée d'autres propriétés, comme le fait qu'ils désignent une quantité exacte ou approximative.

Les Mundurucús ne diffèrent donc des occidentaux que sous les deux aspects suivants :

- Pour ceux qui ne parlent pas portugais, ils n'ont pas de noms de nombres exacts; en conséquence ils ne peuvent pas mémoriser des valeurs précises de numérosité.
- Ils ne disposent pas d'une procédure adéquate pour extraire la numérosité exacte d'un ensemble; à chaque fois qu'ils veulent évaluer une numérosité, ils utilisent donc une valeur approximative.

La détérioration des performances dans un certain nombres de tâches exactes n'est donc pas le fruit de limitations conceptuelles chez les Mundurucús, mais émane de l'absence d'outils culturels, sans lesquels il n'est pas possible d'être efficace. Le développement de la cognition numérique reposerait donc en grande partie sur une disposition universelle à représenter et manipuler les numérosités. Nous ne pouvons pas exclure par ailleurs la possibilité que la faculté de langage, en particulier la faculté de récursion, soit nécessaire à l'acquisition de certains concepts numériques. Par contre, nos données rejettent l'hypothèse whorfienne d'une influence du lexique numérique sur le développement des concepts numériques. En particulier, contrairement aux postulats de la théorie du bootstrapping, la compréhension de la structure de la suite des numéraux n'intervient pas dans le développement du concept de numérosité exacte.

Conclusion générale

Chapitre 11

Plusieurs étapes du développement de la cognition numérique

Sensibilité à la numérosité dès les premiers mois de vie Des tests comportementaux avaient montré que les bébés de 6 mois sont capables de discriminer des stimuli sur la base de leur numérosité, mais que cette discrimination est nécessairement approximative, et n'a lieu que dans le domaine des grandes numérosités [Xu and Spelke, 2000, Xu, 2003]. Nous obtenons un résultat positif chez des bébés encore plus jeunes, âgés de 3 mois seulement, à la fois pour des grandes et des petites numérosités. De plus, les réponses cérébrales que nous enregistrons sont comparables, quel que soit le format dans lequel les stimuli ont été présentés (modalité visuelle ou auditive, présentation simultanée ou séquentielle), en accord avec l'idée que les bébés accèderaient à une représentation abstraite de la numérosité. La mesure de l'activité cérébrale surpasse en puissance les mesures comportementales, toujours sujettes à des effets "stratégiques" : d'une part nos données ne reprennent pas les restrictions sur les petits nombres reportées dans la littérature [Feigenson et al., 2004], et d'autre part, la discrimination des grandes numérosités se révèle plus précise que ce qu'indiquaient les données comportementales.

Apprentissage des numéraux entre 30 et 45 mois Vers deux ans et demi, les enfants commencent à réciter la liste des numéraux. Ils se mettent à pratiquer le comptage, activité consistant à attriber successivement à chaque élément d'un ensemble un numéral pris dans l'ordre de la liste. Alors qu'ils sont très vite assez performants pour compter, il leur faut toute une année pour comprendre que le but du comptage est de quantifier un ensemble, et que le dernier mot énoncé représente justement sa numérosité (principe de cardinalité) [Wynn, 1990]. Cette étape correspond-elle seulement à l'acquisition du principe de cardinalité, ou traduit-elle une révolution conceptuelle, au cours de laquelle l'enfant découvrirait le concept de grand nombre exact? En se restreignant à l'étude des enfants occidentaux de cet âge, il n'est pas possible de décider si le facteur déterminant l'acquisition du nombre exact est l'expérience que l'enfant accumule avec les numéraux et le comptage, ou si indépendamment du langage, l'enfant développe un concept de nombre exact au fil des années, guidé par ses expériences sensori-motrices. Par contre, nous avons vu que les Mundurucús,

peuple d'Amazonie qui ne possède pas de numéraux exacts pour les grandes quantités et ne pratique pas le comptage, savent juger de l'égalité exacte entre deux numérosités : il n'est donc pas nécessaire de manipuler les numéraux pour découvrir que les quantités peuvent être définies de manière exacte, à l'unité près. Chez l'enfant occidental, familiarisé avec le comptage et avec des numéraux exacts, tout au plus la découverte du concept de grand nombre exact peut s'en trouver accélérée. L'étude du concept d'égalité exacte fera l'objet de mon travail de post-doctorat avec Elizabeth Spelke, en adaptant la tâche de vérification d'égalité exacte entre des grandes numérosités à des enfants occidentaux de 3 ans.

De manière générale, l'étude des Mundurucús nous a permis de conclure que l'acquisition du lexique numérique ne joue pas un rôle crucial dans le développement de la cognition numérique : l'absence de numéraux détériore les performances dans certaines tâches qui ne sont pas solubles sans disposer d'une stratégie verbale efficace, mais n'influence pas les connaissances conceptuelles.

Attribution d'une valeur de numérosité aux numéraux dès 5 ans Les tâches d'estimation étudient l'attribution d'une signification quantitative aux numéraux. Dès cinq ans, les estimations des enfants témoignent de l'existence de correspondances entre les numéraux et des valeurs de numérosité. Quant aux Mundurucús, enfants et adultes se sont tous avérés capables d'attribuer une valeur approximative de numérosité aux numéraux mundurucús et portugais.

Les enfants occidentaux de 5 ans parviennent à estimer la numérosité d'un ensemble présenté visuellement [Huntley-Fenner, 2001], et la distribution de leurs réponses suit la même structure de variabilité que chez les adultes. Cependant, Huntley-Fenner n'a pas enregistré un nombre suffisant d'essais pour étudier la forme de la fonction de réponse, qui donne la réponse moyenne pour les stimuli de chaque numérosité. Siegler et Opfer [Siegler and Opfer, 2003] ont abordé cette question en utilisant une tâche d'estimation d'une autre forme, où les enfants devaient placer des nombres sur des lignes physiques. A huit ans, les productions des enfants sont arrangées de manière non-linéaire, compressive : les petits nombres apparaissent plus espacés que les grands sur l'échelle produite. Ces distorsions suggèrent que les numérosités sont encodées de manière compressive (à distance égale, deux grandes numérosités sont perçues plus proches que deux numérosités petites). L'enfant apprend ensuite à corriger ces distorsions : entre 8 et 12 ans, il corrige progressivement ses productions et parvient à répartir les nombres régulièrement sur la ligne.

L'état adulte Bien que les adultes disposent d'un système symbolique puissant pour représenter et manipuler les nombres, ils continuent d'avoir accès à leurs représentations analogues, non-verbales de la numérosité. Ils sont capables d'effectuer des calculs approximatifs sur des stimuli non-symboliques. Malgré l'absence de numéraux pour des quantités élevées, les Mundurucús sont aussi performants que les occidentaux sur ce genre de tâches non-symboliques. La manipulation de ces représentations de numérosité n'est donc pas influencée par la langue, et reflète l'existence d'une compétence arithmétique universelle. Notre modèle mathématique de ligne numérique capture de façon fine la structure des représentations de quantité, et ses prédictions s'accordent avec les observations expérimentales dans des tâches variées, aussi bien chez les Mundurucús (tâches

de comparaison, d'addition et de soustraction de numérosités) que chez les Occidentaux (tâches de comparaison, d'addition de numérosités, jugement de l'égalité entre deux numérosité, estimation de la numérosité d'un stimulus).

Par ailleurs, les adultes peuvent faire correspondre à chaque numéral une valeur de numérosité. Cette correspondance est imprécise et incertaine : ainsi en calibrant quelqu'un sur un nombre de référence, il est possible de modifier drastiquement ses estimations. Confrontées avec les prédictions de notre modèle, les données de notre tâche d'estimation révèlent des effets que seule une ligne numérique compressive permet d'expliquer. Comme celle des enfants dans la tâche de placement des nombres sur une ligne physique, la fonction de réponse des adultes en estimation est non-linéaire. Les adultes ont appris à se corriger lorsqu'il s'agit de placer des nombres sur une ligne (peut-être à force de mesurer des longueurs, de manipuler des objets gradués comme une règle), mais pour l'estimation de numérosités qui est une tâche plus difficile, les imperfections de cette correction se révèlent.

Représentations de numérosités et ensembles numériques en mathématiques

Nos recherches nous ont conduit à formuler un modèle précis, quantitatif des représentations non-verbales de numérosité. Ces représentations, formées à partir de stimuli à valeurs discrètes, sont approximatives : plus on s'éloigne vers les grands nombres, plus ils se confondent entre eux. A l'exception des tous petits nombres, qui sont aisément séparés, les perceptions de numérosité forment un continuum, dont toutes les valeurs peuvent être atteintes. D'un autre côté, malgré les limites intrinsèques de ces représentations de numérosité, tous les êtres humains, y compris ceux comme les Mundurucús qui n'ont pas de mots pour exprimer ces concepts, savent que toute numérosité peut être définie de manière exacte, qu'ajouter ou retirer ne seraitce qu'un élément à un ensemble change sa cardinalité, même si ce changement n'est pas perceptible. Les nombres entiers et les nombres réels, ces deux ensembles mathématiques dont la construction rigoureuse a pris des siècles aux mathématiciens, d'essais en erreurs et d'erreurs en trouvailles, seraient deux idéalisations opposées à partir d'un même système cognitif. Les nombres entiers idéalisent la précision des représentations de quantité et matérialisent l'idée que toute numérosité peut être exacte; quant aux nombres réels, au contraire, ils émergent si on pousse à l'extrême l'imprécision de ces représentations, en une sorte de passage à la limite, effaçant la saillance de certains points du continuum. Si réels et entiers sont construits sur la même base cognitive, cela explique qu'il soit si facile de gérer des situations où les propriétés de ces deux types de nombres se mêlent : mesure d'une quantité (à priori réelle, dans les faits à valeur discrète), estimation grossière de la numérosité d'un ensemble (à priori une valeur discrète, dans les faits c'est un intervalle de valeurs qu'on désigne). C'est aussi pourquoi des opérations comme l'addition, la soustraction, qui font partie de notre compétence arithmétique universelle, sont aussi facilement définies sur l'un ou l'autre de ces types de nombres.



Table des figures

2.1	Loi de la variabilité scalaire chez le rat [Gallistel and Gelman, 2000]	21
2.2	Classification de numérosités [Emmerton and Niemann, 1997, Meck and Church, 1984]	23
2.3	Neurones sensibles à la numérosité [Nieder et al., 2002]	30
2.4	Loi de la variabilité scalaire chez l'humain [Gallistel and Gelman, 2000].	42
2.5	Estimation de numérosités [Minturn and Reese, 1951]	44
2.6	Loi du ratio chez le singe [Nieder and Miller, 2003]	59
2.7	Soustraction de numérosités par des pigeons [Brannon et al., 2001]	60
3.1	Echelles internes linéaire, puissance et logarithmique	73
3.2	Estimation de prix [Dehaene and Marques, 2002]	76
4.1	Illustration de la Théorie de Détection du Signal	83
4.2	Règle du ratio et modèle de la ligne numérique	87
4.3	Définition de critères de réponses pour des réponses numériques.	96
5.1	Détection de changement et de comparaison : stimuli [Piazza et al., 2004]	.09
5.2	$\label{eq:definition} D\'{e}tection de changement et comparaison : contr\^{o}le des param\`{e}tres [Piazza et al., 2004]. . . 1000 et changement et comparaison : contr\^{o}le des param\`{e}tres [Piazza et al., 2004].$.11
5.3	Prédictions des différents modèles de ligne interne pour la comparaison	.13
5.4	Détection de changement et comparaison : résultats [Piazza et al., 2004]	.18
5.5	Addition et soustraction de numérosités [Pica et al., 2004]	.23
5.6	$Estimation: stimuli. \hspace*{0.5cm} \ldots \hspace*{0.5c$.27
5.7	Modèle de l'estimation : déformation de la grille de réponse	.30
5.8	Estimation : prédictions du modèle	.33
5.9	Estimation : réponses des sujets non calibrés	.34
5.10	Estimation : réponses des sujets calibrés	.36
5.11	Estimation : réponses basées sur les paramètres non-numériques des stimuli	.39
5.12	Reconstruction de la distribution des activations sur la ligne interne	.42
6.1	Localisation des régions pariétales liées au traitement des nombres [Dehaene et al., 2003] 1	.54
6.2	Localisation des aires numériques chez l'homme et le singe [Dehaene et al., 2004]	63

264 TABLE DES FIGURES

7.1	Subitisation [Piazza et al., 2003]	178
8.1	Sensibilité des bébés à la numérosité : stimuli	184
8.2	Sensibilité des bébés à la numérosité pour des stimuli auditifs	187
8.3	Décours temporel des activations	190
8.4	Effet de changement de numérosité	192
8.5	Effet de changement d'objet.	193
9.1 9.2	Procédé de comptage sur le corps	
10.1	Territoire Mundurucú et liste des participants [Pica et al., 2004]	217
10.2	Dénomination des numérosités en Mundurucú [Pica et al., 2004].	220
10.3	Arithmétique approximative sur des numérosités [Pica et al., 2004]	223
10.4	Comparaison de numérosités cachées	228
10.5	Soustraction exacte [Pica et al., 2004]	231
10.6	Egalité exacte entre des grandes numérosités.	235
10.7	Précision de la signification des numéraux	240
10.8	Associations entre les numéraux et les numérosités	245

Bibliographie

- [Allik and Tuulmets, 1991] Allik, J. and Tuulmets, T. (1991). Occupancy model of perceived numerosity. Perception and Psychophysics, 49(4):303–314.
- [Allik and Tuulmets, 1993] Allik, J. and Tuulmets, T. (1993). Perceived numerosity of spatiotemporal events. Perception and Psychophysics, 53(4):450–459.
- [Andres et al., 2004] Andres, M., Davare, M., Pesenti, M., Olivier, E., and Seron, X. (2004). Number magnitude and grip aperture interaction. *Neuroreport*, 15:2773–2777.
- [Antell and Keating, 1983] Antell, S. E. and Keating, L. E. (1983). Perception of numerical invariance by neonates. *Child Development*, 54:695–701.
- [Attneave, 1962] Attneave, F. (1962). Perception and related areas., volume 4 of Psychology: A study of a science. S. Koch, McGraw-Hill.
- [Banks and Coleman, 1981] Banks, W. P. and Coleman, M. J. (1981). Two subjective scales of number. Perception and Psychophysics, 29(2):95–105.
- [Banks and Hill, 1974] Banks, W. P. and Hill, D. K. (1974). The apparent magnitude of number scaled by random production. *Journal of Experimental Psychology Monograph*, 102(2):353–376.
- [Barth et al., 2003] Barth, H., Kanwisher, N., and Spelke, E. S. (2003). The construction of large number representations in adults. *Cognition*, 86:201–221.
- [Barth et al., 2005] Barth, H., Mont, K. L., Lipton, J., Dehaene, S., Kanwisher, N., and Spelke, E. S. (2005). Abstract number and arithmetic in preschool children. *Proceedings of the National Academy of Science USA*, 102(39):14116–14121.
- [Beran and Beran, 2004] Beran, M. J. and Beran, M. M. (2004). Chimpanzees remember the results of one-by-one addition of food items to sets over extended time periods. *Psychological Science*, 15(2):94–98.
- [Berlin and Kay, 1969] Berlin, B. and Kay, P. (1969). Basic color terms: their universality and evolution. University of California Press, Berkeley.
- [Bijeljac-Babic et al., 1993] Bijeljac-Babic, R., Bertoncini, J., and Mehler, J. (1993). How do 4-day-old infants categorize multisyllabic utterances? *Developmental Psychology*, 29(4):711–721.
- [Bourdon, 1908] Bourdon, B. (1908). Sur le temps nécessaire pour nommer les nombres. Revue philosophique de la France et de l'étranger, 65:426-431.

[Boysen and Bernston, 1989] Boysen, S. T. and Bernston, G. G. (1989). Numerical competence in a chimpanzee. *Journal of Comparative Psychology*, 103(1):23–31.

- [Brannon, 2002] Brannon, E. M. (2002). The development of ordinal numerical knowledge in infancy. Cognition, 83:223–240.
- [Brannon and Terrace, 1998] Brannon, E. M. and Terrace, H. S. (1998). Ordering of the numerosities 1 to 9 by monkeys. *Science*, 282:746–749.
- [Brannon and Terrace, 2000] Brannon, E. M. and Terrace, H. S. (2000). Representation of the numerosities 1-9 by rhesus macaques (macaca mulatta). *J. Exp. Psych.*: Animal Behavior Processes, 26(1):31–49.
- [Brannon et al., 2001] Brannon, E. M., Wusthoff, C. J., Gallistel, C. R., and Gibbon, J. (2001). Numerical subtraction in the pigeon: Evidence for a linear subjective number scale. *Psychological Science*, 12(3):238–243.
- [Buckley and Gillman, 1974] Buckley, P. B. and Gillman, C. B. (1974). Comparison of digit and dot patterns.

 Journal of Experimental Psychology, 103:1131–1136.
- [Burbaud et al., 1999] Burbaud, P., Camus, O., Guehl, D., Bioulac, B., Caillé, J. M., and Allard, M. (1999).
 A functional magnetic resonance imaging study of mental subtraction in human subjects. Neuroscience Letters, 273:195–199.
- [Burbaud et al., 1995] Burbaud, P., Degreze, P., Lafon, P., Franconi, J. M., Bouligand, B., Bioulac, B., Caille, J. M., and Allard, M. (1995). Lateralization of prefrontal activation during internal mental calculation: a functional magnetic resonance imaging study. J. Neurophysiol., 74(5):2194-2200.
- [Burgess and Barlow, 1983] Burgess, A. and Barlow, H. B. (1983). The precision of numerosity discrimination in arrays of random dots. *Vision Research*, 23(8):811–820.
- [Butterworth, 1999] Butterworth, B. (1999). The mathematical brain. Macmillan, London.
- [Butterworth et al., 2001] Butterworth, B., Cappelletti, M., and Kopelman, M. (2001). Category specificity in reading and writing: The case of number words. *Nature Neuroscience*, 4:784–786.
- [Cappelletti et al., 2001] Cappelletti, M., Butterworth, B., and Kopelman, M. (2001). Spared numerical abilities in a case of semantic dementia. *Neuropsychologia*, 39:1224–1239.
- [Carey, 2001] Carey, S. (2001). Cognitive foundations of arithmetic: evolution and ontogenesis. *Mind and Language*, 16(1):37–55.
- [Carey, 2004] Carey, S. (2004). Bootstrapping and the origin of concepts. Daedalus, Winter: 59–68.
- [Channel, 1980] Channel, J. (1980). More on approximations: a reply to watchel. *Journal of Pragmatics*, 4:461–476.
- [Chochon et al., 1999] Chochon, F., Cohen, L., van de Moortele, P. F., and Dehaene, S. (1999). Differential contributions of the left and right inferior parietal lobules to number processing. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 11:617–630.

[Church and Meck, 1984] Church, R. M. and Meck, W. H. (1984). The numerical attribute of stimuli., pages 445–464. Animal Cognition. H. L. Toitblat and T. G. Bever and H. S. Terrace, Hillsdale, NJ: Erlbaum.

- [Cipolotti and Butterworth, 1995] Cipolotti, L. and Butterworth, B. (1995). Toward a multiroute of number processing: Impaired number transcoding with preserved calculation skills. *J. Exp. Psych.: General*, 124(4):375–390.
- [Cipolotti et al., 1991] Cipolotti, L., Butterworth, B., and Denes, G. (1991). A specific deficit for numbers in a case of dense acalculia. *Brain*, 114:2619–2637.
- [Clearfield and Mix, 1999] Clearfield, M. W. and Mix, K. S. (1999). Number versus contour length in infants' discrimination of small visual sets. *Psychological Science*, 10(5):408–411.
- [Clec'H et al., 2000] Clec'H, G. L., Dehaene, S., Cohen, L., Mehler, J., Dupoux, E., Poline, J.-B., Lehéricy, S., de Moortele, P. F. V., and Bihan, D. L. (2000). Distinct cortical areas for names of number and body parts independent of language and input modality. NeuroImage, 12:381–391.
- [Cohen and Dehaene, 1996] Cohen, L. and Dehaene, S. (1996). Cerebral networks for number processing: Evidence from a case of posterior callosal lesion. *Neurocase*, 2:155–174.
- [Cohen and Dehaene, 2000] Cohen, L. and Dehaene, S. (2000). Calculating without reading: Unsuspected residual abilities in pure alexia. *Cognitive Neuropsychology*, 17:563–583.
- [Cohen et al., 2000] Cohen, L., Dehaene, S., Chochon, F., Lehericy, S., and Naccache, L. (2000). Language and calculation within the parietal lobe: A combined cognitive, anatomical, and fmri study. *Neuropsy-chologia*, 38:1426–1440.
- [Cohen et al., 1994] Cohen, L., Dehaene, S., and Verstichel, P. (1994). Number words and number non-words: A case of deep dyslexia extending to arabic numerals. *Brain*, 117:267–279.
- [Cohen and Marks, 2002] Cohen, L. B. and Marks, K. (2002). How infants process addition and subtraction events. *Developmental Science*, 5(2):186–201.
- [Cohen-Kadosh et al., 2005] Cohen-Kadosh, R., Henik, A., Rubinsten, O., Mohr, H., van de Ven, H. D. V., Zorzi, M., Hendler, T., R, R. G., and Linden, D. E. (2005). Are numbers special? the comparison systems of the human brain investigated by fmri. *Neuropsychologia*, 43(9):1238–1248.
- [Corbetta et al., 2000] Corbetta, M., Kincade, J. M., Ollinger, J. M., McAvoy, M. P., and Shulman, G. L. (2000). Voluntary orienting is dissociated from target detection in human posterior parietal cortex. *Nature Neuroscience*, 3:292–297.
- [Cordes et al., 2001a] Cordes, S., Gelman, R., and Gallistel, C. R. (2001a). Variability signatures distinguish verbal from nonverbal counting for both large and small numbers. *Psychonomic Bulletin and Review*, 8(4):698–707.
- [Cordes et al., 2001b] Cordes, S., Gelman, R., Gallistel, C. R., and Whalen, J. (2001b). Variability signatures distinguish verbal from nonverbal counting for both large and small numbers. *Psychonic Bulletin and Review*, 8(4):698–707.

[Crofts, 1985] Crofts, M. (1985). Aspectos da língua Mundurukú. Summer Institute of Linguistics, Brasilia.

- [Cytowik, 2002] Cytowik, R. E. (1989/2002). Synesthesia: A union of the senses. Springer-Verlag, New-York.
- [Dagenbach and McCloskey, 1992] Dagenbach, D. and McCloskey, M. (1992). The organization of number-facts in memory: Evidence from a brain-damaged patient. *Brain and Cognition*, 20:345–366.
- [Dantzig, 1967] Dantzig, T. (1967). Number: the language of science. The Free Press, New York.
- [Davidoff et al., 1999] Davidoff, J., Davies, I., and Roberson, D. (1999). Colour categories of a stone-age tribe. *Nature*, 398:203–204.
- [Davis and Albert, 1987] Davis, H. and Albert, M. (1987). Failure to transfert or train a numerical discrimination using sequential visual stimuli in rats. *Bulletin of the Psychonomic Society*, 25:472–474.
- [Davis and Bradford, 1986] Davis, H. and Bradford, S. A. (1986). Counting behavior in rats in a simulated natural environment. *Ethology*, 73:265–280.
- [Davis and Perusse, 1988] Davis, H. and Perusse, R. (1988). Numerical competence: From backwater to mainstream of comparative psychology. *Behavioral Brain Sciences*, 11:602–615.
- [Dayan and Abbott, 2001] Dayan, P. and Abbott, L. F. (2001). Theoretical Neuroscience: Computational and mathematical modeling of neural systems. MIT Press, Cambridge, Mass.
- [Dehaene, 1996] Dehaene, S. (1996). The organization of brain activations in number comparison: Event-related potentials and the additive-factors method. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 8(1):47–68.
- [Dehaene, 1997] Dehaene, S. (1997). La bosse des maths. Odile Jacob Science, Paris.
- [Dehaene, 2001] Dehaene, S. (2001). Subtracting pigeons: Logarithmic of linear? *Psychological Science*, 12(3):244-246.
- [Dehaene, 2003] Dehaene, S. (2003). The neural basis of the weber-fechner law: A logarithmic mental number line. Trends in Cognitive Sciences, 7(4):145–147.
- [Dehaene and Akhavein, 1995] Dehaene, S. and Akhavein, R. (1995). Attention, automaticity, and levels of representation in number processing. J. Exp. Psych.: Learning, Memory, & Cognition, 21(2):314–326.
- [Dehaene et al., 1993] Dehaene, S., Bossini, S., and Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and numerical magnitude. *J. Exp. Psych. : General*, 122 :371–396.
- [Dehaene and Changeux, 1993] Dehaene, S. and Changeux, J.-P. (1993). Development of elementary abilities: A neuronal model. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 5:390–407.
- [Dehaene and Cohen, 1991] Dehaene, S. and Cohen, L. (1991). Two mental caculation systems: a case study of severe acalculia with preserved approximation. *Neuropsychologia*, 29(11):1045–1074.
- [Dehaene and Cohen, 1994] Dehaene, S. and Cohen, L. (1994). Dissociable mechanisms of subitizing and counting: Neuropsychological evidence from simultanagnosic patients. J. Exp. Psych.: Human Perception and Performance, 20:958–975.

[Dehaene and Cohen, 1995] Dehaene, S. and Cohen, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical Cognition*, 1(1):83–120.

- [Dehaene and Cohen, 1997] Dehaene, S. and Cohen, L. (1997). Cerebral pathways fo calculation: Double dissociations between gerstmann's acalculia and subcortical acalculia. *Cortex*, 33:219–250.
- [Dehaene et al., 1990] Dehaene, S., Dupoux, E., and Mehler, J. (1990). Is number comparison digital? analogical and symbolic effects in two-digit number comparison. J. Exp. Pxych.: Human Perception and Performance, 21(1):626-641.
- [Dehaene and Marques, 2002] Dehaene, S. and Marques, J. F. (2002). Cognitive euroscience: Scalar variability in price estimation and the cognitive consequences of switching to the euro. *The Quaterly Journal of Experimental Psychology*, 55(3):705–731.
- [Dehaene and Mehler, 1992] Dehaene, S. and Mehler, J. (1992). Cross-linguistic regularities in the frequency of number words. *Cognition*, 43:1–29.
- [Dehaene et al., 2004] Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L., and Wilson, A. J. (2004). Arithmetic and the brain. Current Opinion in Neurobiology, 14:218–224.
- [Dehaene et al., 1998] Dehaene, S., Naccache, L., Clec'H, G. L., Koechlin, E., Mueller, M., Dehaene-Lambertz, G., van de Moortele, P. F., and Bihan, D. L. (1998). Imaging unconscious priming. *Nature*, 395(6702):597–600.
- [Dehaene et al., 2003] Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., and Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, 20:487–506.
- [Dehaene et al., 1999] Dehaene, S., Spelke, E. S., Pinel, P., Stanescu, R., and Tsivkin, S. (1999). Sources of mathematical thinking: Behavioral and brain-imaging evidence. *Science*, 284:970–974.
- [Dehaene-Lambertz and Dehaene, 1994] Dehaene-Lambertz, G. and Dehaene, S. (1994). Speed and cerebral correlates of syllable discrimination in infants. *Nature*, 370:292–295.
- [Delazer and Benke, 1997] Delazer, M. and Benke, T. (1997). Arithmetic facts without meaning. *Cortex*, 33:697–710.
- [Delazer et al., 2003] Delazer, M., Domahs, F., Bartha, L., Brenneis, C., Lochy, A., Trieb, T., and Benke, T. (2003). Learning complex arithmetic an fmri study. *Brain Res. Cogn. Brain Res.*, 18:76–88.
- [Delazer et al., 2004] Delazer, M., Domahs, F., Lochy, A., Bartha, L., Brenneis, C., and Trieb, T. (2004). The acquisition of arithmetic knowledge an fmri study. *Cortex*, 40(1):166–167.
- [Delazer et al., 2005] Delazer, M., Karner, E., Zamarian, L., Donnemiller, E., and Benke, T. (2005). Number processing in posterior cortical atrophy a neuropsychological case study.
- [Dickson and Sawyer, 1990] Dickson, P. R. and Sawyer, A. G. (1990). The price knowledge and search of supermarket shoppers. *Journal of Marketing*, 54:42–53.
- [Duffau et al., 2002] Duffau, H., Denvil, D., Lopes, M., Gasparini, F., Cohen, L., Capelle, L., and Effenterre, R. V. (2002). Intraoperative mapping of the cortical areas involved in multiplication and subtraction: An

electrostimulation study in a patient with a left parietal glioma. Journal of Neurology, Neurosurgery, and Psychiatry, 73:733–738.

- [Duncan and McFarland, 1980] Duncan, E. M. and McFarland, C. E. (1980). Isolating the effects of symbolic distance and semantic congruity in comparative judgments: an additive-factors analysis. *Memory and Cognition*, 8:612–622.
- [Eger et al., 2003] Eger, E., Sterzer, P., Russ, M. O., Giraud, A.-L., and Kleinschmidt, A. (2003). A supramodal number representation in human intraparietal cortex. *Neuron*, 37(4):719–725.
- [Egremont and Rothschild, 1979] Egremont, P. and Rothschild, M. (1979). The calculating cormorans. Biological Journal of the Linnaean Society, 12:181–186.
- [Eliez et al., 2001] Eliez, S., Blasey, C. M., Menon, V., White, C. D., Schmitt, J. E., and Reiss, A. L. (2001). Functional brain imaging study of mathematical reasoning abilities in velocardiofacial syndrome (del22q11.2). *Genet. Med.*, 3:49–55.
- [Emmerton et al., 1997] Emmerton, J. L., Lohmann, A., and Niemann, J. (1997). Pigeon's serial ordering of numerosity with visual arrays. *Animal Learning and Behavior*, 25:234–244.
- [Emmerton and Niemann, 1997] Emmerton, J. L. and Niemann, J. (1997). Pigeon's serial ordering of numerosity with visual arrays. *Animal Learning and Behavior*, 25:234–244.
- [Fayol et al., 1998] Fayol, M., Barrouillet, P., and Marinthe, C. (1998). Predicting arithmetic achievement from neuropsychological performance: A longitudinal study. *Cognition*, 68:63–70.
- [Fayol and Seron,] Fayol, M. and Seron, X. About numerical representations: insights from neuropsychological, experimental and developmental studies.
- [Feigenson, 2005] Feigenson, L. (2005). A double-dissociation in infants' representations of object arrays. Cognition, 95:B37–B48.
- [Feigenson and Carey, 2003] Feigenson, L. and Carey, S. (2003). Tracking individuals via object-files: Evidence from infants' manual search. *Developmental Science*, 6:568–584.
- [Feigenson and Carey, 2005] Feigenson, L. and Carey, S. (2005). On the limits of infants' quantification of small object arrays. in press.
- [Feigenson et al., 2002a] Feigenson, L., Carey, S., and Hauser, M. D. (2002a). The representations underlying infants' choice of more: object files versus analog magnitudes. *Psychological Science*, 13(2):150–156.
- [Feigenson et al., 2002b] Feigenson, L., Carey, S., and Spelke, E. (2002b). Infants' discrimination of number vs continuous extent. *Cognitive Psychology*, 44:33–66.
- [Feigenson et al., 2004] Feigenson, L., Dehaene, S., and Spelke, E. S. (2004). core systems of number. Trends in Cognitive Sciences, 8:307–314.
- [Fernandes and Church, 1982] Fernandes, D. M. and Church, R. H. (1982). Discrimination of the number of sequential events by rats. *Animal Learning and Behavior*, 10(2):171–176.

[Fias et al., 2003] Fias, W., Lammertyn, J., Reynvoet, B., Dupont, P., and Orban, G. A. (2003). Parietal representation of symbolic and nonsymbolic magnitude. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 15(1):47–56.

- [Fiez and Petersen, 1998] Fiez, J. A. and Petersen, S. E. (1998). Neuroimaging studies of word reading. Proceedings of the National Academy of Sciences USA, 95:914-921.
- [Fisher, 2003] Fisher, M. H. (2003). Spatial representations in number processing evidence from a pointing task. *Visual Cognition*, 10:493–508.
- [Fisher et al., 2003] Fisher, M. H., Castel, A. D., Dodd, M. D., and Pratt, J. (2003). Perceiving numbers causes spatial shifts of attention. *Nature Neuroscience*, 6:555–556.
- [Flombaum et al., 2005] Flombaum, J., Junge, J., and Hauser, M. D. (2005). Rhesus monkeys (macaca mulatta) spontaneously compute addition operations over large numbers.
- [Frith and Frith, 1972] Frith, C. D. and Frith, U. (1972). The solitaire illusion: An illusion of numerosity. Perception & Psychophysics, 11(6):409-410.
- [Fulbright et al., 2003] Fulbright, R., Manson, C., Skudlarski, P., and Gore, C. L. J. (2003). Quantity determination and the distance effect with letters, numbers and shapes: A functional mr imaging study of number processing. Am. J. Neuroradiol., 23:197–200.
- [Fulbright et al., 2000] Fulbright, R. K., Molfese, D. L., Stevens, A. A., Skudlarski, P., Lacadie, C. M., and Gore, J. C. (2000). Cerebral activation during multiplication: A functional mr imaging study of number processing. *American Journal of Neuroradiology*, 21:1048–1054.
- [Fuson, 1988] Fuson, K. C. (1988). Children's counting and concepts of number. Springer-Verlag, Berlin.
- [Gallistel and Gelman, 2000] Gallistel, C. R. and Gelman, R. (2000). Non-verbal numerical cognition: From reals to integers. *Trends in Cognitive Sciences*, 4:59–65.
- [Gallistel and Gelman, ress] Gallistel, C. R. and Gelman, R. (in press). Mathematical cognition. In Campbell, J. I. D., editor, *Handbook of Mathematical Cognition*. Psychology Press, New York.
- [Galton, 1880] Galton, F. (1880). Visualised numerals. Nature, 21:252-256; 494-495.
- [Garcia-Orza et al., 2003] Garcia-Orza, J., Leon-Carrion, J., and Vega, O. (2003). Dissociating arabic numeral reading and basic calculation: A case study. *Neurocase*, 9(2):129–139.
- [Gazzaniga and Hillyard, 1971] Gazzaniga, M. S. and Hillyard, S. A. (1971). Language and speech capacity in the right hemisphere. *Neuropsychologia*, 9:273–280.
- [Gazzaniga and Smylie, 1984] Gazzaniga, M. S. and Smylie, C. E. (1984). Dissociation of language and cognition: a psychological profile of two disconnected hemispheres. *Brain*, 107:145–153.
- [Geary et al., 2000] Geary, D. C., Hamson, C. O., and Hoard, M. K. (2000). Numerical and arithmetical cognition: A longitudinal study of process and concept deficits in children with learning disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, 77:236–263.
- [Gelman and Butterworth, 2005] Gelman, R. and Butterworth, B. (2005). Number and language: how are they related? TRENDS in Cognitive Sciences, 9(1):6-10.

[Gelman and Gallistel, 1978] Gelman, R. and Gallistel, C. R. (1978). The child understanding a number. Harvard University Press, Cambridge.

- [Gelman and Meck, 1983] Gelman, R. and Meck, E. (1983). Preschoolers' counting: Principles before skill. Cognition, 13:343–359.
- [Ghatan et al., 1998] Ghatan, P. H., Hsieh, J. C., Petersson, K. M., Stone-Elander, S., and Ingvar, M. (1998). Coexistence of attention-based facilitation and inhibition in the human cortex. *NeuroImage*, 7:23–29.
- [Gibbon, 1977] Gibbon, J. (1977). Scalar expectancy theory and weber's law in animal timing. *Psychological Review*, 84:279–335.
- [Ginsburg, 1978] Ginsburg, N. (1978). Perceived numerosity, item arrangement, and expectancy. American Journal of Psychology, 91(2):267–273.
- [Gliga and Dehaene-Lambertz, 2005] Gliga, T. and Dehaene-Lambertz, G. (2005). Structural encoding of body and face in human infants and adults. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 17(8):1328–1340.
- [Golestani et al., 2002] Golestani, N., Paus, T., and Zatorre, R. J. (2002). Anatomical correlates of learning novel speech sounds. *Neuron*, 35:997–1010.
- [Gordon, 2004] Gordon, P. (2004). Numerical cognition without words: evidence from amazonia. *Science*, 306(5695):496-499.
- [Goto, 1971] Goto, H. (1971). Auditory perception by normal japanese adults of the sounds "l" and "r". Neuropsychologia, 9:317–323.
- [Grafman et al., 1989] Grafman, J., Kampen, D., Rosenberg, J., Salazar, A., and Boller, F. (1989). Calculation abilities in a patient with a virtual left hemispherectomy. *Behavioural Neurology*, 2:183–194.
- [Grill-Spector and Malach, 2001] Grill-Spector, K. and Malach, R. (2001). fmr-adaptation: a tool for studying the functional properties of human cortical neurons. *Acta Psychol. (Amst.)*, 107:293–321.
- [Gruber et al., 2001] Gruber, O., Indefrey, P., Steinmetz, H., and Kleinschmidt, A. (2001). Dissociating neural correlates of cognitive components in mental calculation. *Cerebral Cortex*, 11:350–359.
- [Hasson et al., 2003] Hasson, U., Harel, M., Levy, I., and Malach, R. (2003). Large-scale mirror symmetry organization of human occipito-temporal object areas. *Neuron*, 35:1027–1041.
- [Hauser and Carey, 2003] Hauser, M. D. and Carey, S. (2003). Spontaneous representation in semi-free-ranging rhesus monkeys. *Proceedings of the Royal Society of London Ser. B*, 267:829–833.
- [Hauser et al., 2000] Hauser, M. D., Carey, S., and Hauser, L. B. (2000). Spontaneous number representation in semi-free ranging rhesus monkeys. *Proceedings of the Royal Society of London B*, 267:829–833.
- [Hauser et al., 2002] Hauser, M. D., Chomsky, N., and Fitch, W. T. (2002). The faculty of language: what is it, who has it, and how did it evolve? *Science*, 298:1569–1579.
- [Hauser et al., 1996] Hauser, M. D., MacNeilage, P., and Ware, M. (1996). Numerical representations in primates. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 93(4):1514–1517.

[Hauser et al., 2003] Hauser, M. D., Tsao, F., Garcia, P., and Spelke, E. S. (2003). Evolutionary foundations of number: Spontaneous representation of numerical magnitudes by cotton-top tamarins. *Proc. R. Soc. Lond. B Biol. Sci.*, 270(1523):1441–1446.

- [Hermer and Spelke, 1996] Hermer, L. and Spelke, E. S. (1996). Modularity and development: the case of spatial reorientation. *Cognition*, 61(3):195–232.
- [Hermer-Vazquez et al., 1999] Hermer-Vazquez, L., Spelke, E. S., and Katsnelson, A. S. (1999). Sources of flexibility in human cognition: dual-task studies of space and language. *Cognitive Psychology*, 39(1):3–36.
- [Hespos and Spelke, 2004] Hespos, S. J. and Spelke, E. S. (2004). Conceptual precursors to language. *Nature*, 430(6998):453–456.
- [Hinrichs et al., 1982] Hinrichs, J. V., Berie, J. L., and Mosell, M. K. (1982). Place information in multidigit number comparison. *Memory and Cognition*, 10:487–495.
- [Hinrichs et al., 1981] Hinrichs, J. V., Yurko, D. S., and Hu, J. M. (1981). Two-digit number comparison: use of place information. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 7:890-901.
- [Hollingsworth et al., 1991] Hollingsworth, W. H., Simmons, J. P., Coates, T., and Cross, H. A. (1991). Perceived numerosity as a function of array number, speed of array development, and density of array items. *Bulletin of the Psychonomic Society*, 29(5):448–450.
- [Houdé and Tzourio-Mazoyer, 2003] Houdé, O. and Tzourio-Mazoyer, N. (2003). Neural foundations of logical and mathematical cognition. *Nat. Rev. Neurosci.*, 4:507–514.
- [Hubbard et al., 2005] Hubbard, E., Piazza, M., Pinel, P., and Dehaene, S. (2005). Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature reviews neuroscience*, 6:435–448.
- [Huntley-Fenner, 2001] Huntley-Fenner, G. (2001). Children's understanding of number is similar to adults' and rats': numerical estimation by 5-7-year-olds. *Cognition*, 78:B27–B40.
- [Hurford, 1987] Hurford, J. R. (1987). Language and number: the emergence of a cognitive system. B. Blackwell, Cambridge Mass.
- [Ifrah, 1994] Ifrah, G. (1994). Histoire Universelle des Chiffres. Robert Laffon Bouqins.
- [Indow and Ida, 1977] Indow, T. and Ida, M. (1977). Scaling of dot numerosity. *Perception and Psychophysics*, 22(3):265–276.
- [Isaacs et al., 2001] Isaacs, E. B., Edmonds, C. J., Lucas, A., and Gadian, D. G. (2001). Calculation difficulties in children of very low birthweight: A neural correlate. *Brain*, 124:1701–1707.
- [Izard and Dehaene,] Izard, V. and Dehaene, S. Calibrating the number line. Soumis à Perception & Psychophysics.
- [Jefferies et al., 2005] Jefferies, E., Bateman, D., and Lambon-Ralph, M. A. (2005). The role of the temporal lobe semantic system in number knowledge: evidence from late-stage semantic dementia. *Neuropsychologia*, 43(6):887–905.

[Jong et al., 1996] Jong, B. M. D., van Zomeren, A. H., Willemsen, H. T. M., and Paans, A. M. J. (1996). Brain activity related to serial cognitive performance resembles circuitry of higher order motor control. Exp. Brain. Res., 109:136-140.

- [Jordan et al., 2005] Jordan, K. E., Brannon, E. M., Logothetis, N. K., and Ghazanfar, A. A. (2005). Monkeys match the number of voices they hear to the number of faces they see. *Current Biology*, 15(11):1034–1038.
- [Kaufman et al., 1949] Kaufman, E. L., Lord, M. W., Reese, T. W., and Volkmann, J. (1949). The discrimination of visual number. *American Journal of Psychology*, 62:498–525.
- [Kaufmann et al., 2005] Kaufmann, L., Koppelstaetter, F., Delazer, M., Siedentopf, C., Rhomberg, P., Golaszewski, S., Felber, S., and Ischebeck, A. (2005). Neural correlates of distance and congruity effects in a numerical stroop task: an event-related fmri study. *Neuroimage*, 25(3):888–898.
- [Kawashima et al., 2004] Kawashima, R., Taira, M., Okita, K., Inoue, K., Tajima, N., Yoshida, H., Sasaki, T., Sugiura, M., J., and Fukuda, H. (2004). A functional mri study of simple arithmetic—a comparison between children and adults. Cognitive Brain Research, 18:227–233.
- [Kiefer and Dehaene, 1997] Kiefer, M. and Dehaene, S. (1997). The time course of parietal activation in single-digit multiplication: Evidence from event-related potentials. *Mathematical Cognition*, 3:1–30.
- [Kilian et al., 2003] Kilian, A., Yaman, S., von Fersen, L., and Gunturkun, O. (2003). A bottlenose dolphin discriminates visual stimuli differing in numerosity. *Learning and Behavior*, 31:133–142.
- [Koechlin et al., 1998] Koechlin, E., Dehaene, S., and Mehler, J. (1998). Numerical transformations in five-month-old infants. *Mathematical Cognition*, 3:89–104.
- [Koehler, 1951] Koehler, O. (1951). The ability of birds to count. Bulletin of Animal Behavior, 9:41–45.
- [Krueger, 1972] Krueger, L. E. (1972). Perceived numerosity. Perception and Psychophysics, 11(1):5-9.
- [Krueger, 1982] Krueger, L. E. (1982). Single judgments of numerosity. *Perception and Psychophysics*, 31(2):175–182.
- [Krueger, 1984] Krueger, L. E. (1984). Perceived numerosity: A comparison of magnitude production, magnitude estimation, and discrimination judgments. *Perception and Psychophysics*, 35(6):536–542.
- [Krueger, 1989] Krueger, L. E. (1989). Reconciling fechner and stevens: Toward a unified psychophysical law. Behavioral and Brain Sciences, 12:251–320.
- [Kuhl et al., 1992] Kuhl, P. K., Williams, K. A., Lacerda, F., Stevens, K. N., and Lindblom, B. (1992).
 Linguistic experience alters phonetic perception in infants by 6 months of age. Science, 255(5044):606–608.
- [Lampl et al., 1994] Lampl, Y., Eshel, Y., Gilad, R., and Sarova-Pinhas, I. (1994). Selective acalculia with sparing of the subtraction process in a patient with left parietotemporal hemorrhage. *Neurology*, 44:1759–1761.

[Lee, 2000] Lee, K. M. (2000). Cortical areas differentially involved in multiplication and subtraction: A functional magnetic resonance imaging study and correlation with a case of selective acalculia. Annals of Neurology, 48:657–661.

- [Lee and Kang, 2002] Lee, K. M. and Kang, S. Y. (2002). Arithmetic operation and working memory: Differential suppression in dual tasks. *Cognition*, 83:B63–B68.
- [LeFevre et al., 1996] LeFevre, J.-A., Sadesky, G. S., and Bisanz, J. (1996). Selection of procedures in mental addition: Reassessing the problem size effect in adults. *J. Exp. Psych.: Learning, Memory, and Cognition*, 22:216–230.
- [Lemer et al., 2003] Lemer, C., Dehaene, S., Spelke, E. S., and Cohen, L. (2003). Approximate quantities and exact number words: dissociable systems. *Neuropsychologia*, 41:1942–1958.
- [Leslie et al., 1998] Leslie, A., Xu, F., Tremoulet, P., and Scholl, B. (1998). Indexing and the object concept: Developing 'what' and 'where' systems. *Trends in Cognitive Science*, 2(1):10–18.
- [Levy et al., 1999] Levy, L. M., Reis, I. L., and Grafman, J. (1999). Metabolic abnormalities detected by h-mrs in dyscalculia and dysgraphia. *Neurology*, 53:639–641.
- [Lipton and Spelke, 2003] Lipton, J. S. and Spelke, E. S. (2003). Origins of number sense: Large-number discrimination in human infants. *Psychological Science*, 14(5):396–401.
- [Lipton and Spelke, 2005] Lipton, J. S. and Spelke, E. S. (2005). Preschool children master the logic of number word meanings.
- [Logie and Baddeley, 1987] Logie, R. H. and Baddeley, A. D. (1987). Cognitive processes in counting. J. Exp. Psych.: Learning, Memory and Cognition, 13(2):310–326.
- [Majid et al., 2004] Majid, A., Bowerman, M., Kita, S., Haun, D. B., and Levinson, S. C. (2004). Can language restructure cognition? the case for space. *Trends in Cognitive Science*, 8(3):108–114.
- [Matsuzawa, 1985] Matsuzawa, T. (1985). Use of numbers by a chimpanzee. Nature, 315:57-59.
- [McComb et al., 1994a] McComb, K., Packer, C., and Pusey, A. (1994a). Roaring and numerical assessment in contests between groups of female lions, panthera leo. *Animal Behavior*, 47:379–387.
- [McComb et al., 1994b] McComb, K., Packer, C., and Pusey, A. (1994b). Roaring and numerical assessment in contests between groups of female lions, panthera leo. *Animal Behavior*, 47:379–387.
- [McCrink and Wynn, 2004] McCrink, K. and Wynn, K. (2004). large number addition and subtraction by 9-month-old infants. *Psychological Science*, 15(11):776–781.
- [McNeil and Warrington, 1994] McNeil, J. E. and Warrington, E. K. (1994). A dissociation between addition and subtraction with written calculation. *Neuropsychologia*, 32:717–728.
- [Mechner, 1958] Mechner, F. (1958). Probability relations within response sequences under ratio reinforcement. Journal of the Experimental Analysis of Behavior, 1:109–122.
- [Mechner and Guevrekian, 1962] Mechner, F. and Guevrekian, L. (1962). Effects of deprivation upon counting and timing in rats. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 5(4):463–466.

[Meck and Church, 1983] Meck, W. H. and Church, R. M. (1983). A mode control model of counting and timing process. J. Exp. Psych.: Animal Behavior Processes, 9(3):320–334.

- [Meck and Church, 1984] Meck, W. H. and Church, R. M. (1984). Simultaneous temporal processing. J. Exp. Psych.: Animal Behavior Processes, 10(1):1–29.
- [Mehler and Dupoux, 1990] Mehler, J. and Dupoux, E. (1990). Naître humain. Odile Jacob, Paris.
- [Menon et al., 2000] Menon, V., Rivera, S. M., White, C. D., Glover, G. H., and Reiss, A. L. (2000). Dissociating prefrontal and parietal cortex activation during arithmetic processing. *NeuroImage*, 12:357–365.
- [Miller and Eimas, 1983] Miller, J. L. and Eimas, P. D. (1983). Studies on the categorization of speech by infants. *Cognition*, 13:135–165.
- [Minturn and Reese, 1951] Minturn, A. L. and Reese, T. W. (1951). The effect of differential reinforcement on the discrimination of visual number. *Journal of Psychology*, 31:201–231.
- [Mix et al., 1997] Mix, K. S., Levine, S. C., and Huttenlocher, J. (1997). Numerical abstraction in infants: Another look. *Developmental Psychology*, 23:665–670.
- [Molko et al., 2003] Molko, N., Cachia, A., Rivière, D., Mangin, J.-F., Bruandet, M., Bihan, D. L., Cohen, L., and Dehaene, S. (2003). Functional and structural alterations of the intraparietal sulcus in a developmental dyscaculia of genetic origin. *Neuron*, 40(4):847–858.
- [Moore et al., 1987] Moore, D., Benenson, J., Reznick, J. S., Peterson, M., and Kagan, J. (1987). Effect of auditory numerical information on infants' looking behavior: Contradictory evidence. *Developmental Psychology*, 23:665–670.
- [Moyer and Landauer, 1967] Moyer, R. S. and Landauer, T. K. (1967). Time required for judgments of numerical inequality. *Nature*, 215:1519–1520.
- [Naccache and Dehaene, 2001] Naccache, L. and Dehaene, S. (2001). The priming methode: Imaging unconscious repetition priming reveals an abstract representation of number in parietal lobes. *Cerebral Cortex*, 11:966–974.
- [Newman, 1974] Newman, C. V. (1974). Detection of differences between visual textures with varying number of dots. *Bulletin of the Psychonomic Society*, 4:201–202.
- [Nieder et al., 2002] Nieder, A., Freedman, D. J., and Miller, E. K. (2002). Representation of the quantity of visual items in the primate prefrontal cortex. *Science*, 297:1708–1711.
- [Nieder and Miller, 2004] Nieder, A. and Miller, E. (2004). A parieto-frontal network for visual numerical information in the monkey. *PNAS*, 101(19):7457–7462.
- [Nieder and Miller, 2003] Nieder, A. and Miller, E. K. (2003). Coding of cognitive magnitude: Compressed scaling of numerical information in the primate prefrontal cortex. *Neuron*, 37(1):149–157.
- [Pastore, 1961] Pastore, N. (1961). Number sense and "counting" abilities in the canary. Zeitschrift für Tierpsychologie, 18:561–573.

[Pesenti et al., 1994] Pesenti, M., Seron, X., and van den Linden, M. (1994). Selective impairment as evidence for mental organisation of number facts: Bb, a case of preserved subtraction? *Cortex*, 30:661–671.

- [Pesenti et al., 2000] Pesenti, M., Thioux, M., Seron, X., and de Volder, A. (2000). Neuroanatomical substrates of arabic number processing, numerical comparison and simple addition: A pet study. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 12:461–479.
- [Piazza et al., 2003] Piazza, M., Giacomini, E., Bihan, D. L., and Dehaene, S. (2003). Single-trial classification of parallel pre-attentive and serial attentive processes using functional magnetic resonance imaging. Proc. R. Soc. Lond. B, 270:1237–1245.
- [Piazza et al., 2004] Piazza, M., Izard, V., Pinel, P., Bihan, D. L., and Dehaene, S. (2004). Tuning curves for approximate numerosity in the human intraparietal sulcus. *Neuron*, 44(3):547–55.
- [Piazza et al., 2002a] Piazza, M., Mechelli, A., Butterworth, B., and Price, C. J. (2002a). Are subitizing and counting implemented as separate or functionally overlapping processes? *NeuroImage*, 15:435–446.
- [Piazza et al., 2002b] Piazza, M., Mechelli, A., Price, C. J., and Butterworth, B. (2002b). The quantifying brain: Functional neuroanatomy of numerosity estimation and counting.
- [Pica et al., 2004] Pica, P., Lemer, C., Izard, V., and Dehaene, S. (2004). Exact and approximate arithmetic in an amazonian indigene group. *Science*, 306:499–503.
- [Pinel et al., 2001] Pinel, P., Dehaene, S., Rivière, D., and Bihan, D. L. (2001). Modulation of parietal activation by semantic distance in a number comparison task. *Neuroimage*, 14:1013–1026.
- [Pinel et al., 2004] Pinel, P., Piazza, M., Bihan, D. L., and Dehaene, S. (2004). Distributed and overlapping cerebral representations of number, size, and luminance during comparative judgments. *Neuron*, 41:983–993.
- [Pinker and Jackendoff, 2005] Pinker, S. and Jackendoff, R. (2005). The nature of the language faculty and its implications for evolution of language (reply to fitch, hauser, and chomsky). Cognition, 97(2):211–225.
- [Platt and Johnson, 1971] Platt, J. R. and Johnson, D. M. (1971). Localization of position within a homogeneous behavior chain: Effects of error contingencies. *Learning and Motivation*, 2:386–414.
- [Pollmann and Jansen, 1996] Pollmann, T. and Jansen, C. (1996). The language user as an arithmetician. Cognition, 59:219–237.
- [Poulton, 1979] Poulton, E. C. (1979). Models for biases in judging sensory magnitude. *Psychological Bulletin*, 86(4):777–803.
- [Rivera et al., 2002] Rivera, S. M., Menon, V., White, C. D., Glaser, B., and Reiss, A. L. (2002). Functional brain activation during arithmetic processing in females with fragile x syndrome is related to fmr1 protein expression. *Hum. Brain Mapp.*, 16:206–218.
- [Roberson et al., 2004] Roberson, D., Davidoff, J., Davies, I., and Shapiro, L. (2004). The development of color categories in two languages: a longitudinal study. *Journal of Experimental Psychology: General*, 133:554–571.

- [Rosch, 1975] Rosch, E. (1975). Cognitive reference points. Cognitive Psychology, 7:532–547.
- [Rosner, 1965] Rosner, B. S. (1965). The power law and subjectives scales of number. *Perceptual and Motor Skills*, 21:42.
- [Rossetti et al., 2004] Rossetti, Y., Jacquin-Courtois, S., Rode, G., Ota, H., Michel, C., and Boisson, D. (2004). Is action the link between number and space representation? visuo-manual adaptation improves number bisection in unilateral neglect. *Psychological Science*, 15:426–430.
- [Rueckert et al., 1996] Rueckert, L., Lange, N., Partiot, A., Appollonio, I., Litvar, I., Bihan, D. L., and Grafman, J. (1996). Visualizing cortical activation during mental calculation with funtional mri. *NeuroImage*, 3:97–103.
- [Rule, 1969] Rule, S. J. (1969). Equal discriminality scale of number. *Journal of Experimental Psychology*, 79:35–38.
- [Rumbaugh et al., 1987] Rumbaugh, D. M., Savage-Rumbaugh, S., and Hegel, M. T. (1987). Summation in the chimpanzee (pan troglodytes). J. Exp. Psych.: Animal Behavior Processes, 13:107–115.
- [Sarnecka and Gelman, 2004] Sarnecka, B. W. and Gelman, S. A. (2004). Six does not just mean a lot: Preschoolers see number words as specific. *Cognition*, 92:329–352.
- [Sawamura et al., 2002] Sawamura, H., Shima, K., and Tanji, J. (2002). Numerical representation for action in the parietal cortex of the monkey. *Nature*, 415:918–922.
- [Schwartz and Keus, 2004] Schwartz, W. and Keus, I. M. (2004). Movind the eyes along the mental number line: comparing snarc effects with saccadic and manual responses. *Perception and Psychophysics*, 66:651–664.
- [Seron et al., 1992] Seron, X., Pesenti, M., Noël, M.-P., Deloche, G., and Cornet, J. A. (1992). Images of numbers, or "when 98 is upper left and 6 sky blue". *Cognition*, 44:159–196.
- [Seymour et al., 1994] Seymour, S. E., Reuter-Lorenz, P. A., and Gazzaniga, M. S. (1994). The disconnection syndrome: basic findings confirmed. *Brain*, 117:105–115.
- [Shepard et al., 1975] Shepard, R. N., Kilpatric, D. W., and Cunningham, J. P. (1975). The internal representation of numbers. *Cognitive Psychology*, 7:82–138.
- [Shuman and Kanwisher, 2004] Shuman, M. and Kanwisher, N. (2004). Numerical magnitude in the human parietal lobe; tests of representational generality and domain specificity. *Neuron*, 44:557–569.
- [Siegler and Opfer, 2003] Siegler, R. S. and Opfer, J. E. (2003). the development of numerical estimation: evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science*, 14(3):237–243.
- [Simon et al., 2002] Simon, O., Mangin, J. F., Cohen, L., Bihan, D. L., and Dehaene, S. (2002). Topographical layout of eye, calculation, and language-related areas in the human parietal lobe. *Neuron*, 33:475–487.
- [Simon, 1997] Simon, T. J. (1997). Reconceptualizing the origins of number knowledge: a non-numerical account. *Cognitive Development*, 12:349–372.

[Simon, 1999] Simon, T. J. (1999). The foundations of numerical thinking in a brain without numbers.

Trends in Cognitive Sciences, 3(10):363–364.

- [Simon et al., 1995] Simon, T. J., Hespos, S., and Rochat, P. (1995). Do infants understand simple arithmetic? a replication of wynn (1992). *Cognitive Development*, 10:253–269.
- [Spelke et al., 1995] Spelke, E. S., Kestenbaum, R., Simons, D. J., and Wein, D. (1995). Spatio-temporal continuity, smoothness of motion and object identity in infancy. *British Journal of Developmental Psychology*, 13:113–142.
- [Spelke and Tsivkin, 2001] Spelke, E. S. and Tsivkin, S. (2001). Language and the brain: a bilingual training study. *Cognition*, 78:45–88.
- [Stanescu-Cosson et al., 2000] Stanescu-Cosson, R., Pinel, P., van de Moortele, P., Bihan, D. L., Cohen, L., and Dehaene, S. (2000). Understanding dissociations in dyscalculia: a brain imaging study of the impact of number size calculation. *Brain*, 123:2240–2255.
- [Starkey, 1992] Starkey, P. (1992). The early development of numerical reasoning. Cognition, 43(2):93-126.
- [Starkey and Cooper, 1980] Starkey, P. and Cooper, R. G. J. (1980). Perception of numbers by human infants. *Science*, 210:1033–1035.
- [Starkey et al., 1983] Starkey, P., Spelke, E. S., and Gelman, R. (1983). Detection of intermodal numerical correspondences by human infants. *Science*, 222(4620):179–181.
- [Starkey et al., 1990] Starkey, P., Spelke, E. S., and Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. *Cognition*, 36:97–128.
- [Stevens, 1964] Stevens, S. S. (1964). Concerning the psychophysical power law. Quaterly Journal of Experimental Psychology, 16:383–385.
- [Strauss and Curtis, 1981] Strauss, M. S. and Curtis, L. (1981). Infant perception of numerosity. *Developmental Psychology*, 52:1146-1152.
- [Strömer, 1932] Strömer, C. (1932). Die Sprache der Mundurukú. Vienne.
- [Sulkowski and Hauser, 2000] Sulkowski, G. M. and Hauser, M. D. (2000). Can rhesus monkeys spontaneously subtract? *Cognition*, 79:239–262.
- [Sulkowski and Hauser, 2001] Sulkowski, G. M. and Hauser, M. D. (2001). Can rhesus monkeys spontaneously subtract? *Cognition*, 79(3):239–262.
- [Taves, 1941] Taves, E. H. (1941). Two mechanisms for the perception of visual numerousness. *Archives of Psychology*, 37(265):1–47.
- [Teghtsoonian and Teghtsoonian, 1978] Teghtsoonian, R. and Teghtsoonian, M. (1978). Range and regression effects in magnitude scaling. *Perception & Psychophysics*, 24(4):305–314.
- [Temple, 1991] Temple, C. M. (1991). Procedural dyscalculia and number fact dyscalculia: Double dissociation in developmental dyscalculia. *Cognitive Neuropsychology*, 8:155–176.

[Temple and Posner, 1998] Temple, E. and Posner, M. I. (1998). Brain mechanisms of quantity are similar in 5-year-olds and adults. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, 95(13):7836-7841.

- [Thioux et al., 2005] Thioux, M., Pesenti, M., Costes, N., Volder, A. D., and Seron, X. (2005). Task-independent semantic activation for number and animals. *Cognitive Brain Research*, 24:284–290.
- [Thioux et al., 2002] Thioux, M., Pesenti, M., Volder, A. D., and Seron, X. (2002). Category-specific representation and processing of numbers and animal names across semantic tasks: A pet study. *NeuroImage*, 13(6):S617.
- [Thioux et al., 1998] Thioux, M., Pillon, A., Samson, D., de Pratz, M. P., Noël, M.-P., and Seron, X. (1998). The isolation of numerals at the semantic level. *Neurocase*, 4:371–389.
- [Thompson et al., 1970] Thompson, R. F., Mayers, K. S., Robertson, R. T., and Patterson, C. J. (1970). Number coding in association cortex of the cat. *Science*, 168:271–273.
- [Thurstone, 1927] Thurstone, L. L. (1927). A law of comparative judgment. *Psychological Review*, 34:273–286.
- [Treiber and Wilcox, 1984] Treiber, F. and Wilcox, S. (1984). Discrimination of number by infants. *Infant Behavior and Development*, 7:93–100.
- [Uller et al., 1999] Uller, C., Carey, S., Huntley-Fenner, G., and Klatt, L. (1999). What representation might underlie infant numerical knowledge. *Cognitive Development*, 14:1–36.
- [Uller et al., 2001] Uller, C., Hauser, M. D., and Carey, S. (2001). Spontaneous representation of number in cotton-top tamarins (saguinus oedipus). *Journal of Comparative Psychology*, 115(3):248–257.
- [van Harskamp and Cipolotti, 2001] van Harskamp, N. J. and Cipolotti, L. (2001). Selective impairments for addition, subtraction and multiplication implication for the organisation of arithmetical facts. *Cortex*, 37:363–388.
- [van Harskamp et al., 2002] van Harskamp, N. J., Rudge, P., and Cipolotti, L. (2002). Are multiplication facts implemented by the left supramarginal and angular gyri? *Neuropsychologia*, 40:1786–1793.
- [van Loosbroek and Smitsman, 1990] van Loosbroek, E. and Smitsman, A. W. (1990). Visual perception of numerosity in infancy. *Developmental Psychology*, 26(6):916–922.
- [van Oeffelen and Vos, 1982] van Oeffelen, M. P. and Vos, P. G. (1982). A probabilistic model for the discrimination of visual number. *Perception and Psychophysics*, 32:163–170.
- [Varley et al., 2005] Varley, R. A., Klessinger, N. J. C., Romanawski, C. A. J., and Siegal, M. (2005). Agrammatic but numerate. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 102(9):3519–3524.
- [Venkatraman et al., 2005] Venkatraman, V., Ansari, D., and Chee, M. W. L. (2005). Neural correlates of symbolic and non-symbolic arithmetic. *Neuropsychologia*, 43:744–753.
- [Verguts and Fias, 2004] Verguts, T. and Fias, W. (2004). Representation of number in animals and humans: a neural model. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 16(9):1493–1504.

[Walsh, 2003] Walsh, V. (2003). A theory of magnitude: Common cortical metrics of time, space and quantity. Trends in Cognitive Science, 7(11):483–488.

- [Warrington, 1982] Warrington, E. K. (1982). The fractionation of arithmetical skills: A single case study. Quaterly Journal of Experimental Psychology, 34(A):31–51.
- [Whalen, 2002] Whalen, J. (2002). Representing arithmetic table facts in memory: evidence from acquired impairments. Cognitive Neuropsychology, 19:505–522.
- [Whalen et al., 1999] Whalen, J., Gallistel, C. R., and Gelman, R. (1999). Non-verbal counting in humans: The psychophysics of number representation. *Psychological Science*, 10(2):130–137.
- [Whalen et al., 1997] Whalen, J., McCloskey, M., Lesser, R. P., and Gordon, B. (1997). Localizing arithmetic processes in the brain: Evidence from transient deficit during cortical stimulation. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 9:409–417.
- [Wickens, 2002] Wickens, T. D. (2002). Elementary Signal Detection Theory. Oxford University Press, New-York.
- [Wilson et al., 2001] Wilson, M. L., Hauser, M. D., and Wrangham, R. W. (2001). Does participation in cooperative intergroup conflict depend on numerical assessment, range location, or rank for wild chimpanzees? *Animal Behavior*, 61:1203–1216.
- [Wood and Spelke, 2005] Wood, J. and Spelke, E. S. (2005). Chronometric studies of numerical cognition in five-month-old infants. *Cognition*, 97(1):23–39.
- [Wynn, 1990] Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. Cognition, 36:155-193.
- [Wynn, 1992a] Wynn, K. (1992a). Addition and subtraction by human infants. Nature, 358:749-750.
- [Wynn, 1992b] Wynn, K. (1992b). Children's acquisition of the number words and the counting system.

 Cognitive Psychology, 24:220–251.
- [Wynn, 1996] Wynn, K. (1996). Infants' individuation and enumeration of actions. *Psychological Science*, 7:164–168.
- [Wynn et al., 2002] Wynn, K., Bloom, P., and Chiang, W. (2002). Enumeration of collective entities by 5-month-old infants. *Cognition*, 83:B55–B62.
- [Xu, 2003] Xu, F. (2003). Numerosity discrimination in infants: Evidence for two systems of representations. Cognition, 89:B15–B25.
- [Xu and Arriaga, 2003] Xu, F. and Arriaga, R. I. (2003). Large number discrimination in 10-month-old infants.
- [Xu and Spelke, 2000] Xu, F. and Spelke, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. Cognition, 74:B1–B11.
- [Xu et al., 2005] Xu, F., Spelke, E. S., and Goddard, S. (2005). Number sense in human infants. *Developmental Science*, 8(1):88–101.

[Yagoubi et al., 2003] Yagoubi, R. E., Lemaire, P., and Besson, M. (2003). Different brain mechanisms mediate two strategies in arithmetic: evidence from event-related brain potentials. *Neuropsychologia*, 41:855–862.

- [Zago et al., 2001] Zago, L., Pesenti, M., Mellet, E., Crivello, F., Mazoyer, B., and Tzourio-Mazoyer, N. (2001). Neural correlates of simple and complex mental calculations. *NeuroImage*, 13(2):314–327.
- [Zago and Tzourio-Mazoyer, 2002] Zago, L. and Tzourio-Mazoyer, N. (2002). Distinguishing visuospatial working memory and complex mental calculation areas within the parietal lobes. *Neuroscience Letters*, 331(1):45–49.
- [Zorzi et al., 2002] Zorzi, M., Priftis, K., and Umilta, C. (2002). Neglects disrupts the mental number line.

 Nature, 417:138–139.

Résumé

L'homme manipule les nombres en utilisant les mots de sa langue. De plus, tout un ensemble de données convergent pour indiquer qu'il dispose aussi d'un système non-verbal pour représenter la numérosité des ensembles, système hérité du monde animal. Nous avons abordé la question des interactions entre représentations numériques verbales et non-verbales, en étudiant trois populations différentes : des adultes occidentaux, des bébés de trois mois, ainsi que des Indiens d'Amazonie, les Mundurucús, peuple dont la langue possède un lexique numérique très restreint.

Nos recherches s'articulent autour des trois axes suivants :

- 1. Tout d'abord nous avons cherché à donner une caractérisation fine des représentations non-verbales de la numérosité, à l'aide d'un modèle mathématique, qui postule que les numérosités sont représentées sur un continuum interne, la ligne numérique interne. Les prédictions du modèle s'accordent avec un ensemble de mesures expérimentales, sur des tâches de comparaison, d'addition et de soustraction de numérosités. Enfin, en confrontant les prédictions du modèle aux résultats d'une tâche d'estimation de numérosité que nous avons développée, nous avons pu conclure que la ligne numérique interne est compressive.
- 2. Par ailleurs, nos travaux sur l'estimation abordent la question des liens entre les représentations de numérosités et les numéraux de la langue. De manière spontanée, les sujets ont une tendance marquée à sous-estimer la numérosité des stimuli, mais la donnée d'un indice suffit à modifier radicalement la manière dont ils sont calibrés. De plus, le processus de calibration agit de manière globale sur toute la ligne numérique.
- 3. Enfin, que se passe-t-il en l'absence de représentations verbales pour les nombres? A l'aide de la technique des potentiels évoqués (ERPs), nous avons montré que les bébés âgés de trois mois sont déjà sensibles à la numéro-sité. Par ailleurs, nos expériences chez les Indiens Mundurucús montrent qu'en l'absence d'un lexique pour les grands nombres, ceux-ci déploient les mêmes compétences que des occidentaux dans des tâches d'arithmétique sur la numérosité, tant qu'on n'exige qu'une réponse approximative. De plus, les Mundurucus possèdent un concept d'égalité exacte, transcendant leurs représentations non-verbales approximatives de numérosité, mais se trouvent limités dans la plupart des tâches d'arithmétique exacte, de fait qu'il leur manque un outil cognitif (analogue à notre procédure de comptage) pour évaluer la numérosité exacte d'un ensemble.

Ces résultats nous éclairent sur les influences respectives de notre bagage biologique et de la culture dans le développement de la cognition numérique.

Summary

Humans use words to manipulate numbers. Moreover, a growing set of data converges on the idea that we possess also a non-verbal system to represent the numerosity of sets, shared with animals. We address the question of the interactions between verbal and non-verbal numerical representations, through three different populations: occidental adults, three-months-old infants, as well as indigenes from Amazonia, the Mundurukús, a poeple with a restricted numerical lexicon.

Three axes of research are developed:

- 1. First, we give a mathematical model of the structure of the non-verbal numerosity representations. This model postulates that numerosities are represented on an internal continuum, the numerical number line. The predictions of the model fit empirical data, acquired on a set of psychophysical tasks on numerosities (comparison, "same"/"different" judgment, addition and subtraction). Finally, we confront the predictions of the model to the results of a numerosity estimation task, and these data enable us to conclude that the internal number line is compressive.
- 2. On another hand, our work on numerical estimation addresses the question of the link between the representations of numerosity and the number words. Spontaneous responses are highly underestimated, but a single reference trial suffices to modify radically how subjects are calibrated. Moreover, the calibration is global and concerns the whole number line.
- 3. What happens in the absence of verbal representations for numbers? Using the technic of event-related potentials (ERPs), we show that 3-months-old infants are sensitive to numerosity. Similarly, in the absence of number words, our Mundurucú participants show the same competences as occidentals in arithmetical tasks on numerosities, as long as the response required is only approximate. Moreover, the Mundurucús possess a concept of exact equality between two numerosities, transcending their approximate non-verbal representations of numerosities. However, their performance is limited in most exact arithmetic tasks, because they lack an appropriate cognitive tool (such as our counting procedure) when the task requires to evaluate the exact numerosity of a set.

These results shed light on the respective influences of biology and culture in the development of numerical cognition.