Les bases biologiques de

Des neurones des nombres existent chez le primate et chez l'homme. Ils fourniraient à l'espèce humaine une intuition du nombre, concept sur lequel s'appuierait la construction culturelle des mathématiques.

Stanislas Dehaene

Existe-t-il une vérité mathématique absolue ? Comment le cerveau humain, dont les capacités sont finies et dont le fonctionnement est faillible, peut-il accéder à un savoir mathématique universel ? De nombreux mathématiciens pensent que les objets mathématiques ont une existence autonome et indépendante de l'esprit humain. Ainsi, le mathématicien français Charles Hermite (1822-1901) pensait que : « Les nombres et les fonctions ne sont pas le produit arbitraire de notre esprit. Ils existent indépendamment de nous avec le même caractère de nécessité que les objets de la réalité objective. Nous les découvrons et nous les étudions comme le font les physiciens, les chimistes ou les zoologues. »

Pour le neurobiologiste, ce point de vue est difficile à soutenir. Quelle est cette mystérieuse matière dont serait faite la réalité mathématique ? Que serait-elle, si ce n'est le produit d'assemblées complexes et interconnectées de neurones dans notre cerveau ? Dans cette perspective biologique, cependant, de vastes questions restent ouvertes. Comment un cerveau humain limité et faillible, bricolé par l'évolution, accéderait-il à une vérité mathématique ? Et surtout, d'où provient « la déraisonnable efficacité » des mathématiques, soulignée par Eugene Wigner ? C'est la question centrale qui troublait Albert Einstein : « Comment se peut-il que les mathématiques, pur produit de la pensée humaine indépendamment de toute expérience, s'ajustent aussi étroitement aux objets de la réalité physique ? »

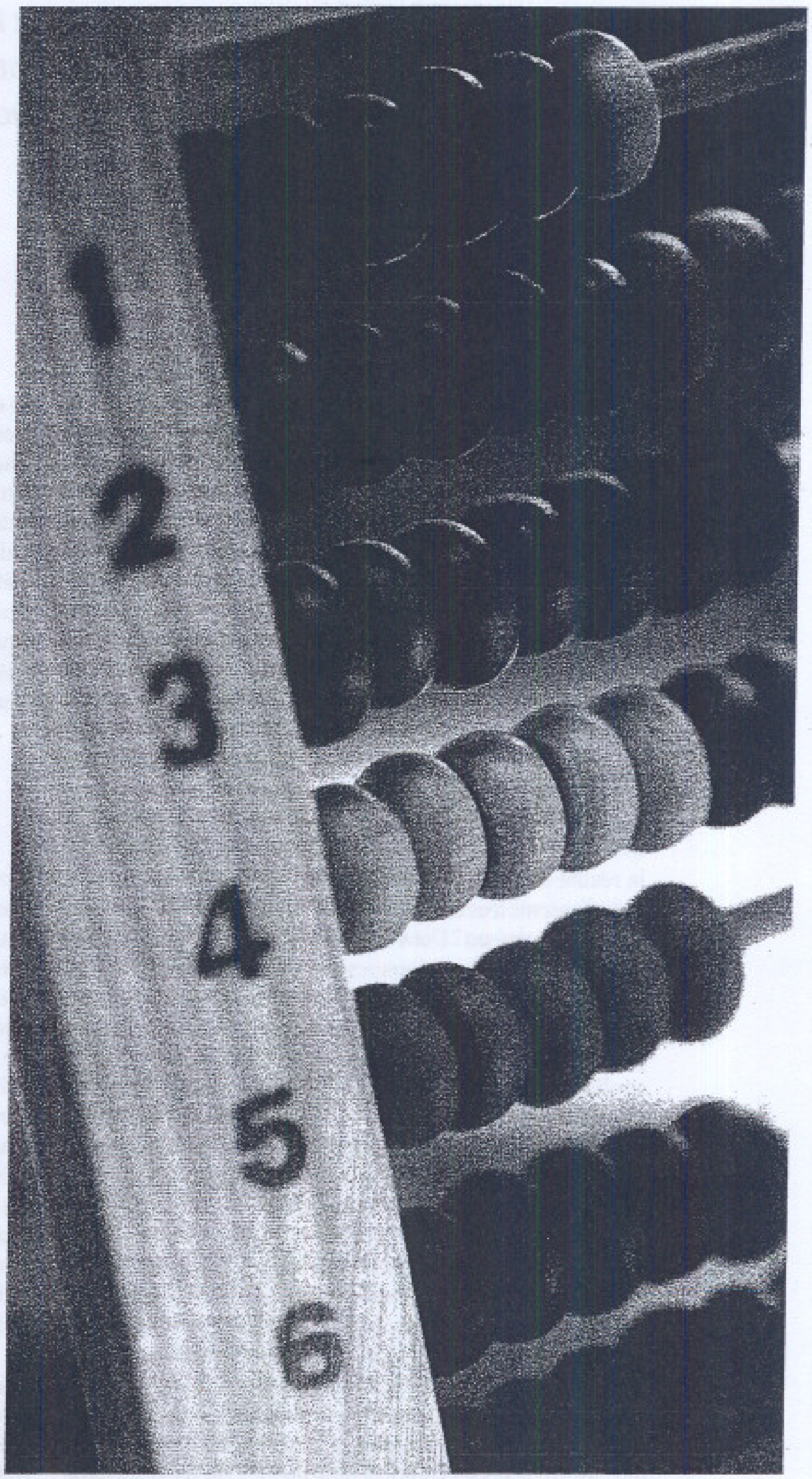
Les expériences de « cognition numérique » que mènent plusieurs laboratoires visent à jeter quelques lumières sur l'origine des objets mathématiques. En dépit des progrès récents réalisés en psychologie et en imagerie cérébrale, il reste aujourd'hui difficile d'examiner les bases cérébrales des mathématiques les plus avancées. C'est pourquoi nous tentons d'étudier les supports cérébraux d'un des fondements des mathématiques, le concept de nombre. L'une des découvertes les plus intéressantes est qu'il existe, dans le cerveau des primates, des neurones qui sont dédiés aux nombres et assurent une représentation des quantités approchées. Ainsi, depuis des millions d'années, l'évolution a imprimé dans notre cerveau un concept de nombre. Toutefois, si le concept de nombre approché est universel, celui de calcul exact ne l'est pas. En effet, nous verrons que l'étude des Mundurukú, un peuple d'Amazonie, dont le vocabulaire ne contient que de très rares mots pour désigner les nombres et qui n'ont jamais reçu d'enseignement des mathématiques, permet de délimiter la part de l'universel et des acquis culturels en arithmétique.

Un nouveau sens : celui des nombres

Considérons une des capacités arithmétiques les plus élémentaires : dire quel est le plus grand de deux nombres. Plusieurs équipes ont montré que cette opération élémentaire peut être réalisée par des animaux de laboratoire et même par des animaux sauvages. Ainsi, des macaques choisissent spontanément, parmi deux lots de morceaux de pomme, celui qui en contient le plus grand nombre. Elizabeth Brannon et Herbert Terrace, de l'Université de Columbia, ont, par exemple, entraîné des macaques à classer des cartes selon le nombre d'objets qui y figuraient. Après avoir été entraînés avec des cartes présentant un à quatre objets, les singes ont spontanément généralisé leur savoir à des chiffres supérieurs, et réussi à classer de cinq à neuf objets. Leurs performances indiquent que ces animaux ont une compétence élémentaire innée à percevoir et à comparer les nombres.

Dans la plupart des expériences, les performances des animaux s'améliorent quand la différence entre les deux nombres à comparer augmente (c'est l'effet de distance), et aussi quand les nombres sont plus petits (c'est l'effet de taille). Mais peut-on identifier la capacité des animaux à comparer

'arithmétique élémentaire

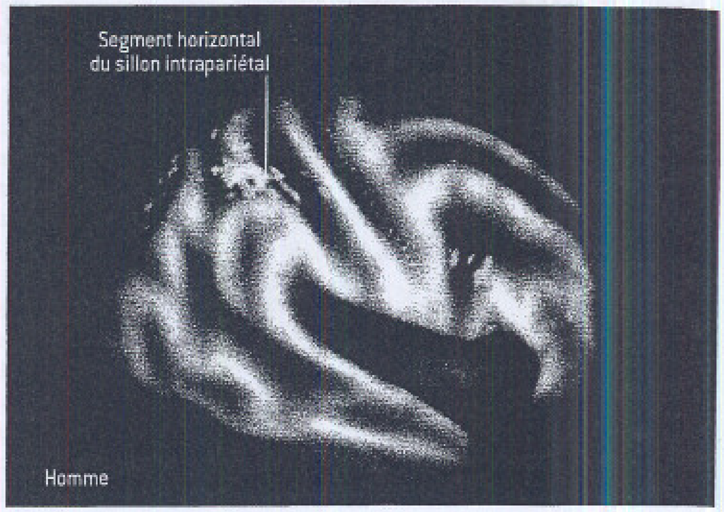


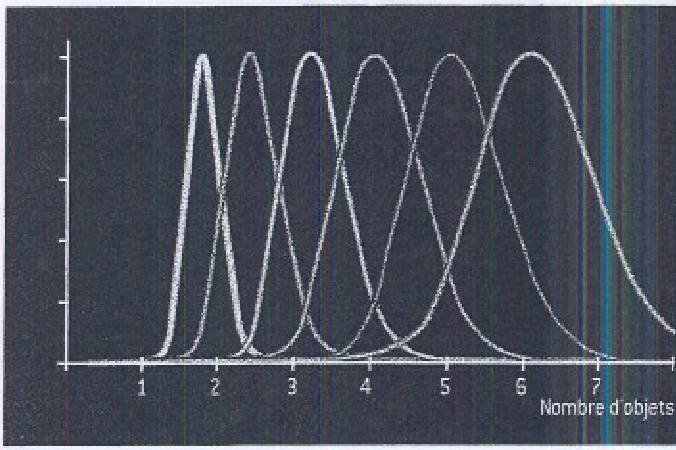
© Zefa/H. Benser

des quantités aux capacités arithmétiques humaines? Avec d'autres équipes, nous avons montré que l'on observe les mêmes effets de distance et de taille chez l'homme à qui l'on demande de comparer deux nombres en caractères arabes. Ainsi, lorsqu'on demande d'indiquer lequel de deux chiffres est le plus grand, les participants sont plus lents et font plus d'erreurs lorsque les nombres sont 8 et 9, que lorsqu'ils sont 5 et 9. C'est aussi le cas quand on leur demande de comparer des nombres à deux chiffres : l'effet de distance est le même que si on leur présente des ensembles d'objets. Avec Philippe Pinel, nous avons récemment étudié les bases neuronales de l'effet de distance durant la comparaison de nombres en utilisant l'imagerie par résonance magnétique fonctionnelle. Nous avons montré que l'activation d'une aire cérébrale nommée sillon intrapariétal (droit et gauche) dépend de l'effet de distance : elle diminue à mesure que la distance entre les nombres à comparer augmente. De nombreuses autres expériences d'imagerie cérébrale au cours du calcul mental suggèrent qu'une partie de ce sillon intrapariétal (le segment horizontal bilatéral) jouerait un rôle particulier dans la représentation des quantités.

L'étude des patients ayant une lésion dans cette aire (au moins dans l'hémisphère gauche) indique qu'ils présentent de graves déficits pour comprendre les nombres et pour calculer (un déficit nommé « acalculie »). Récemment, cette région cérébrale a également été incriminée chez l'enfant présentant une dyscalculie, c'est-à-dire des troubles de l'apprentissage du calcul qui ne sont liés ni à un retard mental ni aux conditions environnementales. Chez les jeunes enfants qui présentent une dyscalculie dans le contexte du syndrome de Turner (une maladie génétique caractérisée par une petite taille, une absence de puberté et de subtils déficits cognitifs, notamment spatiaux), Nicolas Molko, dans mon équipe, a observé en imagerie par résonance magnétique une perte de substance grise dans le sillon intrapariétal. Ces résultats confortent l'hypothèse selon laquelle une bonne représentation des quantités dans le sillon

1. Similarité des régions cérébrales qui répondent aux nombres chez l'homme et chez le singe macaque. Chez l'homme *(à gauche)*, le déplissement partiel des sillons corticaux fait apparaître une région profonde, dans le sillon intrapariétal, qui s'active dès que l'on effectue des opérations arithmétiques. Chez le singe macaque *(à droite)*, dont le cerveau a été considérablement agrandi, des neurones codant les nombres ont été observés dans une région similaire du lobe pariétal, ainsi que dans la région préfrontale dorsolatérale *(flèche rouge)*. L'existence de neurones des nombres avait été prédite par un réseau de neurones artificiels qui modélisait certaines tâches arithmétiques élémentaires *(en bas à gauche)*. Les enregistrements cellulaires pratiqués chez le macaque *(en bas à droite)* ont montré qu'il existe effectivement des neurones qui réagissent préférentiellement à certains nombres d'objets (de 1 à 5). Les courbes de l'activité de ces neurones dédiés à des nombres ressemblent beaucoup aux courbes obtenues avec le réseau de neurones. Les courbes sont de moins en moins précises à mesure que le nombre augmente.





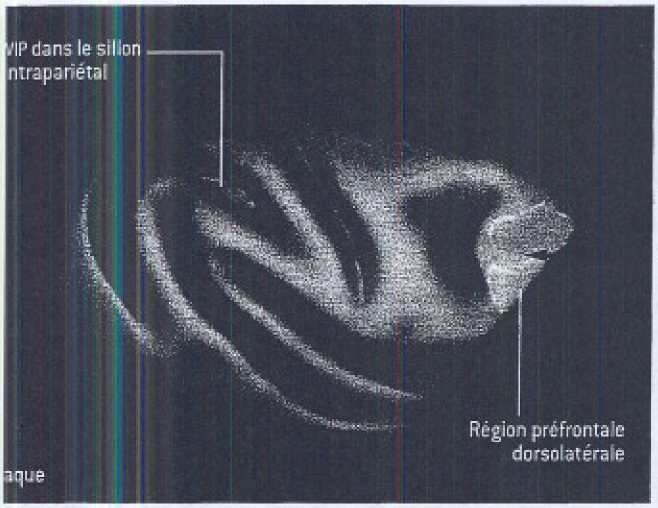
intrapariétal joue un rôle essentiel dans l'apprentissage de l'arithmétique chez l'enfant. Cette aire donnerait aux enfants une sorte d'intuition arithmétique, c'est-à-dire la notion de ce qu'est un nombre et comment les quantités numériques peuvent être comparées et combinées. Quand le sillon intrapariétal est lésé, par une anomalie génétique ou par un accident, le sens des nombres s'émousse et une dyscalculie peut apparaître.

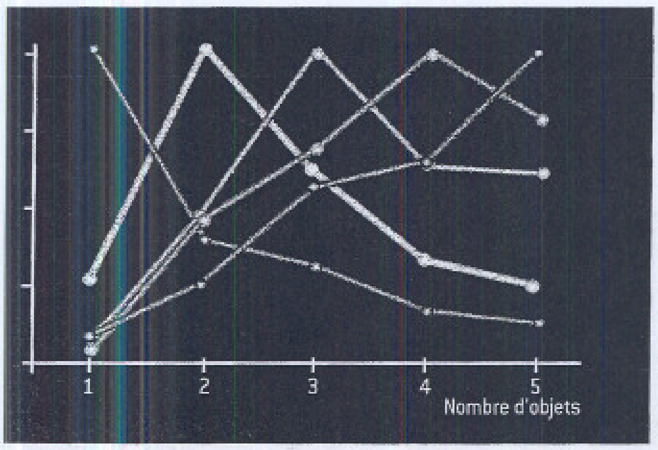
Les neurones des nombres

Comment les nombres peuvent-ils être encodés par une population de neurones? Andreas Nieder et Earl Miller, à l'Institut de technologie du Massachusetts, ont récemment enregistré l'activité de neurones chez des singes éveillés qui avaient été entraînés à comparer deux ensembles d'objets selon leur nombre. Ils ont découvert l'existence d'une population de neurones qui codent les quantités numériques. Certains neurones sont activés préférentiellement par un unique objet, d'autres par deux, par trois, par quatre ou par cinq objets: ils sont « accordés » sur un, deux, trois, etc. Quand le nombre croît, les activations sont de moins en moins précises. Les caractéristiques de ce code neuronal coïncident avec celles que nous avions déduites d'un réseau de neurones que nous avions élaboré avec le neurobiologiste Jean-Pierre Changeux en 1993, pour modéliser l'effet de distance et d'autres caractéristiques de l'arithmétique approximative chez l'adulte et chez l'enfant.

A. Nieder a découvert que les neurones des nombres sont localisés dans le cortex préfrontal dorsolatéral, mais également dans les lobes pariétaux, dans les profondeurs du sillon intrapariétal, dans une région nommée VIP. Celle-ci constitue un homologue plausible, chez le singe, du segment horizontal du sillon intrapariétal qui est activé chez l'homme dans diverses opérations arithmétiques. Dans mon équipe, Olivier Simon a enregistré par IRM fonctionnelle l'activation du cerveau pendant des calculs. Cette étude a révélé que l'activation liée au calcul fait partie d'une carte spatiale d'activations du sillon intrapariétal postérieur, et est encadrée par des régions associées aux saccades oculaires, à l'attention et à la perception de l'espace. Nous avons montré que l'organisation anatomique de ces régions est comparable chez le macaque et chez l'homme. Cela conforte l'idée que les neurones des nombres, localisés chez le macaque dans l'aire VIP, pourraient être un des précurseurs, sur le plan de l'évolution, des capacités arithmétiques de l'homme.

Toutefois, pour établir une stricte homologie interspécifique, il faudrait démontrer que le cortex intrapariétal humain contient aussi des populations de neurones dont chacun répondrait à un nombre particulier. Bien sûr, on ne peut enregistrer l'activité de neurones isolés de façon non invasive dans le cerveau humain. C'est pourquoi, au laboratoire, Manuela Piazza et moi avons adopté une méthode indirecte nous permettant de rechercher si certains neurones, chez l'homme, sont dédiés à des nombres particuliers. Pour ce faire, nous avons enregistré l'activité cérébrale de volontaires par IRM fonctionnelle et nous avons présenté plusieurs fois d'affilée des groupes de points contenant toujours le même nombre d'éléments (par exemple 16). Nous cherchions ainsi à déclencher un mécanisme d'« habituation » de la population neuronale codant cette valeur. Nous savions que, chez le macaque, l'activité de certains neurones (mesurée par des enregistrements électrophysiologiques) diminue lorsque l'on répète plusieurs fois le même stimulus. Nous avons tenté d'obtenir, chez l'homme, une telle réduction progressive de l'activité des neurones des nombres. Après une période d'habituation à un nombre donné, nous présentions de temps en temps un nombre différent, allant de la moitié au double du nombre d'origine. L'imagerie a révélé que deux régions seulement, le sillon intrapariétal





gauche et le droit, réagissaient au changement de nombre. Elles montraient une augmentation de leur activité d'autant plus grande que le nombre nouveau et le nombre de l'habituation étaient différents.

Les analyses détaillées des profils d'activation ont révélé que ces régions se comportent comme on l'attendrait de zones contenant des neurones dédiés au traitement des nombres. Les profils de réponse, tant chez l'homme que chez le singe, dépendent seulement du nombre d'objets et non de leur forme, de leur densité ou de leur arrangement spatial. Cette homologie fonctionnelle ainsi qu'une localisation dans les profondeurs du sillon intrapariétal suggèrent que les hommes et les macaques ont des populations similaires de neurones intrapariétaux sensibles aux nombres. Cela conforte notre hypothèse selon laquelle tous les membres de l'espèce humaine possèdent, avant même leur apprentissage de l'arithmétique, une représentation non verbale des nombres approchés, acquise au cours de l'évolution.

Dès lors, nous proposons un scénario pour l'acquisition d'une arithmétique élémentaire chez l'homme. L'évolution a doté le lobe pariétal des primates d'une représentation grossière des nombres, qui leur a été (et leur est encore) utile en de nombreuses occasions, par exemple pour évaluer le nombre des membres de leur groupe. Cette représentation primitive des nombres existe aussi chez l'homme : elle apparaît très tôt dans l'enfance, et sa précision initialement très médiocre s'améliore au cours de la première année. Elle représente la base élémentaire sur laquelle repose l'arithmétique : elle permet d'estimer le nombre des petits ensembles d'objets, de les comparer, et d'évaluer le résultat d'opérations élémentaires d'addition et de soustraction. Au cours de la première année, ce savoir est non verbal, mais vers l'âge de trois ans, des symboles – les mots qui expriment les nombres, puis les symboles écrits des chiffres arabes – lui sont associés.

Dans quelle mesure ces symboles culturels influent-ils sur la compétence arithmétique de l'espèce humaine ? Chez l'animal, la performance est imprécise au-delà de trois éléments : aucun animal ne distingue 10 objets de 11, et ne sait calculer la différence 9 – 8. Au contraire, les hommes font des calculs avec précision. Nous en déduisons que les noms de nombres et les chiffres arabes ont été fondamentaux pour autoriser le passage d'une arithmétique approximative à une arithmétique exacte.

L'étude des Mundurukú

Nous avons récemment eu l'occasion de tester cette hypothèse dans une population humaine qui n'a pas de mots pour les grands nombres. Avec Pierre Pica, linguiste au CNRS, nous avons étudié les capacités cognitives numériques des Mundurukú, un peuple d'Amazonie dont la langue comporte très peu de mots pour exprimer les nombres. Les Mundurukú ont des mots pour exprimer les nombres de un à cinq, et quelques termes pour dire « peu » ou « beaucoup ». En utilisant des tâches sur ordinateur, nous avons d'abord démontré que ces quelques mots sont employés pour exprimer des quantités approximatives. Quand nous leur demandions de quantifier un groupe de points, les Mundurukú utilisaient approximativement leurs quelques noms de nombres. Leur mot pour « quatre », par exemple, était utilisé pour indiquer de trois à huit objets.

Malgré ce vocabulaire limité, les Indiens que nous avons étudiés maîtrisent parfaitement les grands nombres. Ils savent dire lequel de deux ensembles contient le plus de points, même si ce nombre de points atteint 80, et même lorsque de nombreux paramètres varient, tels que la taille ou la densité des objets. Ils savent aussi faire des calculs approchés : quand on leur montre successivement deux

Les mots des Mundurukú	Sens approximatif et domaine d'utilisation
pug ma	un
xep xep	deux
ebapug	trois (de 3 à 5)
ebadipdip	quatre (de 3 à 8)
pug põgbi	une poignée, cinq (de 5 à 12)
adesu	quelques (de 3 à 15)
ade	beaucoup (de 7 à 15)

2. Les Mundurukú ont peu de mots pour exprimer les nombres. Pourtant, ils savent bien faire les calculs approchés et estimer des quantités.

façon dont la raison pure peut progresser sans l'aide de l'expérience ». Libérées des contraintes de l'expérience, les mathématiques reflètent nécessairement la structure universelle de nos représentations cérébrales. Ainsi, si les mathématiques apparaissent comme des vérités absolues, peut-être est-ce parce qu'elles sont définies par la structure préexistante de nos représentations. En tant que propriétés de notre cerveau, nos représentations de l'espace, du temps et des nombres sont universelles, tout comme nos modestes capacités de déduction logique. Si nous partons d'axiomes fondés sur nos plus profondes intuitions, celles que nous partageons tous, et si nous suivons les mêmes règles de déduction logique, il n'est guère surprenant que nous convergions tous vers les mêmes vérités.

Les mathématiques ne sont pas une construction arbitraire de l'esprit. Au contraire, elles sont profondément contraintes par l'architecture de notre cerveau. Tout au long de l'évolution et durant le développement cérébral de l'enfant, la sélection agit de façon telle que notre cerveau se construise des représentations adaptées au monde extérieur. À notre échelle, par exemple, le monde est essentiellement constitué d'objets qui se combinent entre eux selon l'équation familière $1 + 1 = 2$. Cela pourrait expliquer pourquoi l'évolution a ancré cette règle d'arithmétique, parmi d'autres, dans notre cerveau.

En dernière analyse, la déraisonnable efficacité des mathématiques soulignée par Wigner pourrait alors s'expliquer par un darwinisme neuronal et mental, comme J.-P. Changeux et moi l'avons proposé. Une première vague de sélection, au cours de l'évolution des espèces, met en place les représentations fondamentales d'espace, de temps et de nombre. La seconde, qui s'effectue à l'échelle incomparablement plus rapide de l'évolution culturelle, construit, à partir de ces représentations mentales primaires, des échafaudages culturels élaborés, mais toujours sélectionnés pour leur cohérence interne et leur efficacité à résoudre des problèmes concrets ou abstraits. En résumé, si nos mathématiques sont si efficaces aujourd'hui, c'est peut-être parce que les mathématiques inefficaces d'hier ont été éliminées et remplacées par d'autres... beaucoup plus pèrformantes.

Auteur & Bibliographie

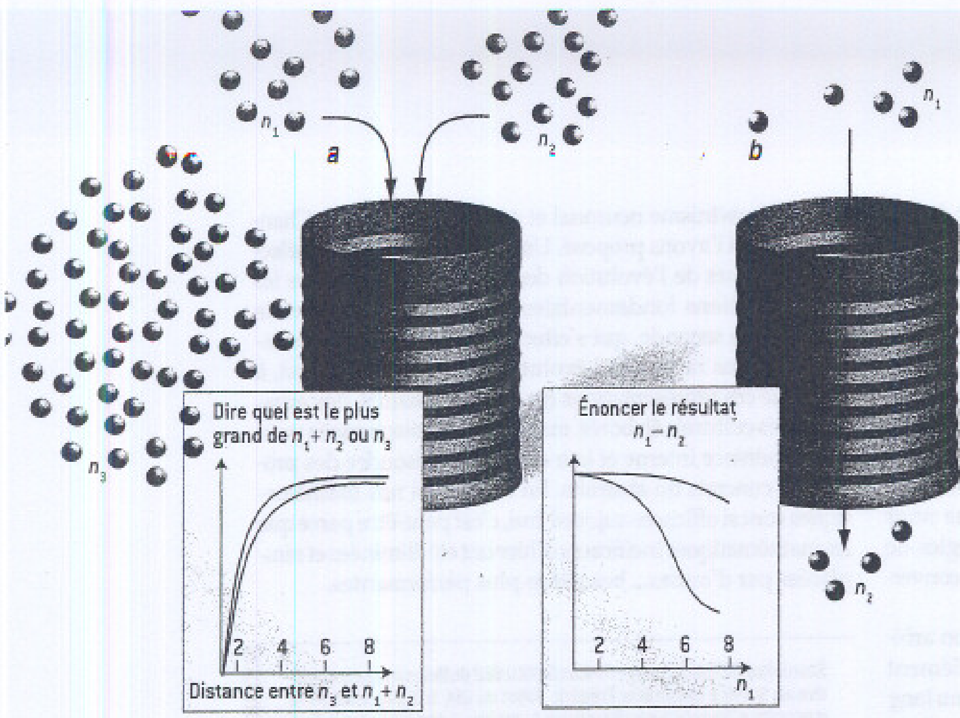
Stanislas DEHAENE dirige l'unité INSERM U 562 de Neuroimagerie cognitive au Service hospitalier Frédéric Joliot du CEA, à Orsay. Lors de la rencontre « Neurobiologie des valeurs humaines » organisée par la Fondation IPSEN, il a donné une conférence dont est extrait cet article.

P. PICA et al., *Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group*, in *Science*, vol. 306 (5695), pp. 499-503, 2004.

S. DEHAENE et al., *Arithmetic and the brain*, in *Curr. Opin. Neurobiol.*, vol. 14(2), pp. 218-224, 2004.

S. DEHAENE et al., *Three parietal circuits for number processing*, in *Cognitive Neuropsychology*, vol. 20, pp. 487-506, 2003.

N. MOLKO et al., *Functional and structural alterations of the intraparietal sulcus in a developmental dyscalculia of genetic origin*, in *Neuron*, vol. 40(4), pp. 847-858, 2003.



3. Les Mundurukú savent faire des calculs approchés aussi bien que les Occidentaux. Ainsi, quand on leur montre deux ensembles de billes qui sont rassemblées dans une boîte *(a)* et qu'on leur demande si la somme des deux ensembles n_1 et n_2 est supérieure ou inférieure à un troisième ensemble n_3, les réponses sont fréquemment correctes, particulièrement lorsque la distance entre les nombres augmente. La performance des Mundurukú *(en vert)* est tout à fait comparable à celle de Français témoins *(en rouge)*. En revanche, les Mundurukú réussissent moins bien quand il s'agit de faire des calculs exacts, des soustractions notamment. Dans notre test de calcul exact, une séquence animée montre des billes qui tombent dans une boîte vide, puis certaines en ressortent, et l'on demande de dire combien il en reste *(b)*. Tant que le nombre de billes en jeu est inférieur à trois, les résultats sont comparables à ceux des Français, mais au-delà de trois, les Mundurukú *(en vert)* ne réussissent plus à donner un résultat correct, contrairement aux Français *(en rouge)*.

ensembles d'objets que l'on cache ensuite dans une boîte, ils savent en faire la somme et les comparer à un troisième ensemble. Ces Indiens qui vivent coupés du monde, qui ne reçoivent aucune éducation et dont le vocabulaire est limité réussissent ces opérations d'approximation aussi bien que des adultes français éduqués.

En revanche, nous avons découvert que les Indiens se comportent différemment lorsqu'il s'agit de faire des calculs exacts. Nous leur avons demandé de faire des soustractions aussi simples que 6 – 4 en cachant six objets dans une boîte, puis en en retirant quatre. Nous nous arrangions pour que le résultat soit toujours 0, 1 ou 2 ; ainsi disposaient-ils toujours d'un mot qui aurait pu exprimer le résultat exact. Dans un des tests, nous leur demandions d'énoncer le résultat et, dans un autre, de désigner le nombre d'objets restant dans la boîte. Dans les deux cas, les Indiens échouèrent à donner le résultat exact. Ils y parvenaient tant que les nombres en jeu restaient inférieurs à trois (par exemple 2 – 2 ou 3 – 1), mais les erreurs étaient d'autant plus fréquentes que les nombres augmentaient, et les résultats devenaient faux plus d'une fois sur deux dès que les nombres en jeu dépassaient 5.

Nous avons conclu de cette étude que les noms de nombres ne sont pas indispensables pour maîtriser les principaux concepts de l'arithmétique (les quantités, la notion de plus grand ou de plus petit, l'addition, la soustraction), ni pour réaliser des opérations approximatives. En revanche, le codage linguistique des nombres semble indispensable pour améliorer ce système primitif d'arithmétique approximative et pour faire des calculs exacts. Si notre hypothèse est correcte, le code verbal des nombres et le comptage sont des outils culturels qui complètent la panoplie des stratégies cognitives dont nous disposons pour résoudre des problèmes concrets. Ainsi la maîtrise d'une séquence de nombres nous permet-elle de dénombrer des objets d'une façon rapide et quasi automatique. Les Mundurukú ne sont pas aguerris à cette pratique, même s'ils savent compter très lentement sur leurs doigts.

Parce que le comptage permet d'apparier exactement une certaine quantité d'objets et le nombre exact correspondant, il favorise vraisemblablement, chez l'enfant, une intégration conceptuelle des représentations des nombres approchés, des représentations des objets, et du code verbal. Vers l'âge de trois ans, les enfants des pays occidentaux montrent un brusque changement dans le traitement des nombres en ce sens qu'ils comprennent tout à coup que chaque nom de nombre se rapporte à une quantité précise. Cette « cristallisation » de nombres discrets à partir d'un continuum de grandeurs approximatives ne semble pas se produire chez les Mundurukú.

Vérité mathématique et construction cérébrale

Ainsi, dans le petit monde de l'arithmétique élémentaire, commençons-nous à identifier les bases cérébrales de quelques vérités mathématiques élémentaires. Comment savons-nous, avec une certitude absolue, que certaines affirmations telles que 1 + 1 = 2 ou 6 – 4 = 2 sont vraies ? Nos recherches indiquent que ces égalités occupent des niveaux différents dans une hiérarchie de constructions culturelles et cérébrales. L'arithmétique la plus élémentaire est inscrite profondément dans notre cerveau. Après des millions d'années d'évolution, certaines de nos aires cérébrales se sont spécialisées afin d'anticiper qu'un objet plus un autre donnent deux objets, si bien que même les nourrissons ont accès à de telles « vérités ». En revanche, 6 – 4 = 2 ne semble pas être une vérité aussi immédiate. Elle nécessite une intégration des représentations verbales et quantitatives des nombres, et n'est pas automatiquement établie : il existe des cultures qui ne l'ont pas encore acquise.

Plus généralement, l'exemple de l'arithmétique suggère que la réalité mathématique est une construction mentale et culturelle, façonnée en partie par les contraintes que l'évolution a fait peser sur le cerveau durant des millions d'années, et en partie par les symboles et autres objets culturels que des générations de mathématiciens ont mis en place. Examinons comment cette définition nous permet d'aborder la question de l'universalité des vérités mathématiques. Comme le soulignait déjà Kant, « la science mathématique représente l'exemple le plus brillant de la